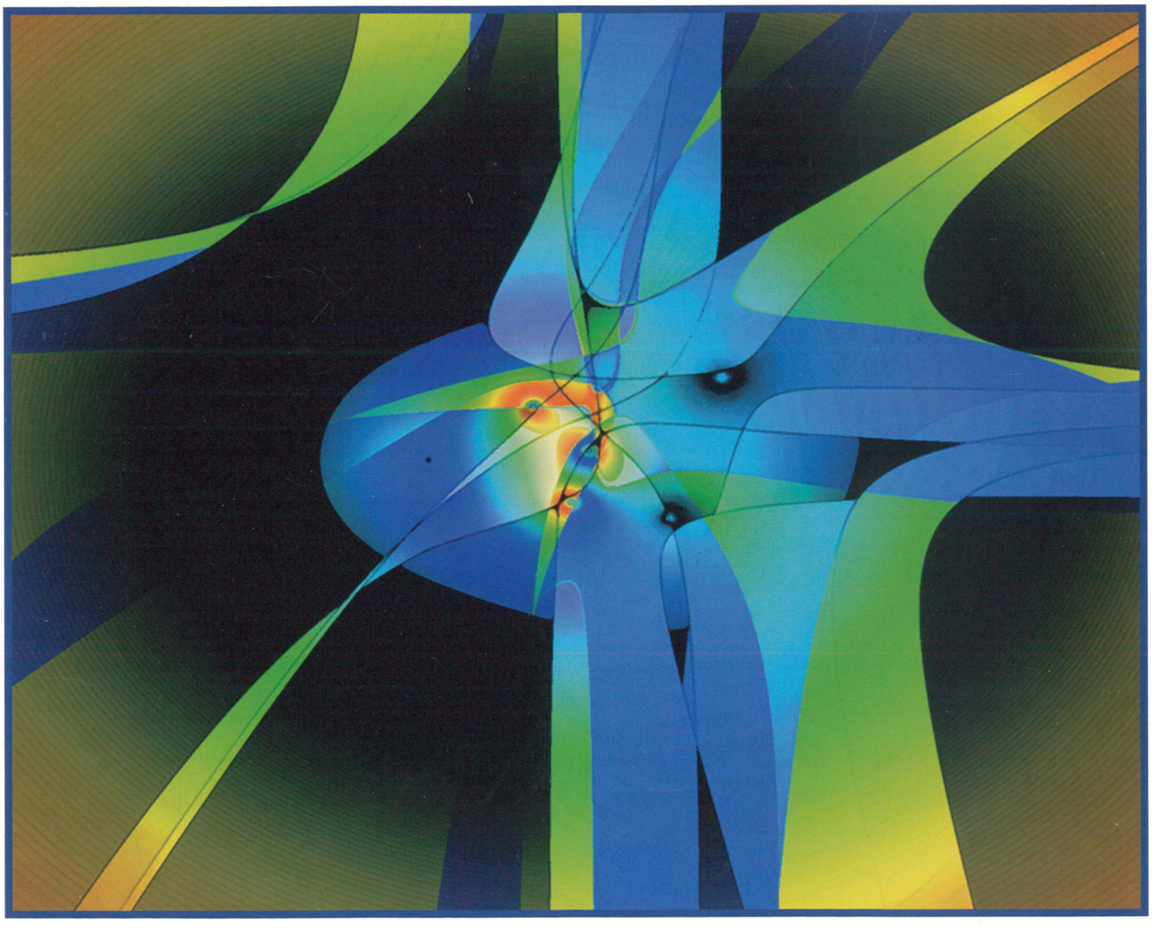
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2010年10月１日発行　第48巻10号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

10
2010

特集 曲面の不思議
その多彩な魅力に迫る



No.568
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 568 October 2010

曲面の不思議

その多彩な魅力に迫る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7〜2007 年/11 省略
2007 年/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎

数理科学臨時別冊一覧

09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展
09 年/9 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
09 年/11 重点解説 基礎微分幾何
09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界
10 年/3 超関数・フーリエ変換入門
10 年/5 問題例で深める物理
10 年/6 非線形現象と微分方程式
10 年/7 数物系のための圏論
10 年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学

October 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 568

特集／曲面の不思議

曲面は現代幾何学のふるさと

森田 茂之

1. ガウスの曲面論

よく知られているように，幾何学の歴史は古い．2000 年以上前のギリシャ時代に，すでにユークリッド幾何学が誕生している．しかし，現代幾何学の源泉は時代をずっと下って 19 世紀のガウス曲面論（1827）にあるといってよいだろう．ガウス（Gauss, 1777–1855）は，時に数学王とも呼ばれるように，数学のほとんどすべての分野で著しい業績を挙げた．幾何学における業績は，ガウスの仕事全体の中では，分量的には少ないと言える．しかし，ガウス曲率，ガウス写像，ガウスの驚愕定理等，そこで導入された新しい概念と結果は，その後の幾何学の発展に決定的な影響を与えた．ガウス曲率は曲面の各点における曲がり具合を，実数によって眼に見える形で表したものであり，今では常識ではあるが当時としてはまさに画期的な考え方である．ガウス写像は，千変万化の曲面の曲がり具合を計る物指として，単位球面が有効に使えることを示した．単位球面は，少し後に現れた今にいうグラスマン多様体の特別な場合と言うことができるが，その後 20 世紀になってトポロジーと呼ばれる分野で展開された分類空間という重要な概念の先駆けである．また，ガウス曲率が曲面がおかれている空間から自立した曲面自身の言葉で記述されることを示した驚愕定理の発見は，曲面の幾何学が，ユークリッド空間からいわば“親離れ”した瞬間であると言えよう．

曲面論に続いて，有名なガウス・ボンネの定理

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S)$$

が登場する．任意の曲がり具合をした向き付けられた閉曲面 S のガウス曲率 K の総和と，オイラー数 $\chi(S)$ との密接な関係を示す美しい等式である．

同じ 19 世紀前半には，ガウス，ボヤイ，ロバチェフスキーによって，それぞれ独立に（双曲的な）非ユークリッド幾何学が創始されている．有名なユークリッド幾何学の第 5 公準を否定した幾何学の誕生である．これもまた，2000 年余という長い時間をかけてようやく近代幾何学が幕開けを迎えたことを示す成果であった．

2. リーマン，ポアンカレの新しい考え

ガウスの曲面に関する理論に続いて，現代幾何学へ至る道筋を確かなものにしたのはリーマン（Riemann, 1826–1866）の仕事である．リーマンは，リーマン予想によってとくに有名であるが，その比較的短い一生においていくつもの深い天才的な

仕事をした．幾何学においては，有名なゲッチンゲン大学への「幾何学の基礎をなす仮説について」と題する就職講演（1854）において，2つの画期的な概念を提出した．すなわち，現代の言葉で言えば，一般次元の多様体の概念と各点で自由に変化する長さが定義されたリーマン多様体の考えである．後者は，ガウスの驚愕定理を一般次元において様々な形で拡張するための理論的枠組みを与え，これにより現代幾何学の一つの柱であるリーマン幾何学（＝微分幾何学）を創始したのである．上記のリーマンの講演を聞いてガウスは感激したと伝えられている．奇しくもこの年はポアンカレ（Poincaré, 1854–1912）が誕生した年でもある．その1年後にガウスはこの世を去った．

曲面に関しては，リーマンはもう一つ極めて重要な概念を提出した．すなわちリーマン面（Riemann surface）の概念である．これは，現代流に言えば曲面上の複素構造のことであり，複素解析学や代数幾何学の分野の概念である．しかし，幾何学においても重要な役割を果たすのである．

リーマン幾何学と並んで現代幾何学のもう一つの柱であるトポロジー（＝位相幾何学）は，ポアンカレが創始した．図形の幾何学的な性質を代数的な量により表す，基本群やホモロジー群等の重要な概念が提出された．ホモロジー群はオイラー数を一段高い立場から精密化したものであり，幾何学に限らず現代数学の中心的な概念の一つとなっている．ポアンカレはまたクライン等と並んで，非ユークリッド幾何学をユークリッド幾何学の枠組みの中で具体的なモデルの構成により実現したことでも知られる．非ユークリッド幾何学は，ユークリッド幾何学と全くかけ離れたところに存在したのではなく，いわば足元にあることを示したのである．

3. 曲面と現代数学

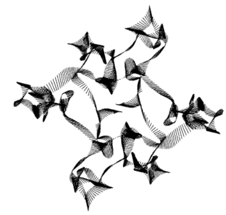
ガウス，リーマン，ポアンカレの仕事に発する現代幾何学の源流は，20世紀に入って着実に川幅を増し，1950年代からの二十数年間に大河を形成することになる．この間，リーマン幾何学とトポロジーの二本柱は，ある意味でそれぞれ独立に発展したと言えるだろう．しかし，1980年代に入って状況は大きく変わる．ドナルドソンによる4次元微分可能多様体に関するゲージ理論を使った画期的な仕事，ジョーンズによる全く新しい観点からの結び目の不変量の構成，およびウィッテンの物理学的考察に基づいた驚くべき命題，あるいは予想等を契機として，幾何学に革命的な変化が生じたのである．それからすでに20年余の時間が経過したが，この流れは依然として続いている．幾何学に限らず，現代数学は大きな変革の時を迎えているといえるだろう．

こうした中で，曲面の幾何学は，数学の様々な分野でその重要性がますます増してきている．リーマン幾何学およびトポロジーはもちろんのこと，代数幾何学や複素解析学，さらには数論や数理物理学に及ぶ広い範囲で極めて重要な役割を演じている．

本特集では，数学の集いの広場とも言える，この古くて新しい研究対象である曲面について，様々な観点から紹介する．読者に曲面のもつ無限の魅力が伝わり，これらを参考にして，さらなる発展を目指していただければ幸いである．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

曲面に親しむ



逆井 卓也

1. はじめに

3次元の世界に住んでいる私たちにとって，曲面というものは，物体の表面として現れる身近な存在であると言えます．時代や文化の違いはあれ，身の回りが3次元の物体（立体）とその表面としての曲面に囲まれているという事実は古今東西変わるはずもなく（未来はわかりませんが），このことからも，曲面や立体を理解しようとするのは純粋な数学の観点からだけでなく，実用上の観点からも重要な研究対象（より素朴には関心事）であったと推測することは難しくありません．例えば，地球の表面もまた曲面となっているわけですが，それを宇宙に出て直接眺めることなく，球面の形をしていると結論づけた古代ギリシャ人の英知は人類の輝かしい歴史であると言えます．また，エラトステネス（275?–194 B.C.）による，太陽の入射角を用いた地球の全周の推定値（約 46,000 km，実際は約 40,000 km）は当時の技術を考えると驚異的なものです．同時期に，数学の世界では，アルキメデス（287?–212 B.C.）によって，球面の表面積がそれに外接する円柱の側面積と等しいということが示されています（図1を参照）．なお，アルキメデスの墓石に球体とそれに外接する円柱が描かれていた，というのは有名な話です．

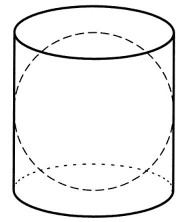


図1　球体とそれに外接する円柱．

こうした例からもわかるように，曲面の研究の歴史は息を呑むほどに長いものとなっています．球面や多面体の表面といった理想的な曲面の研究は，その後，デカルト（1596–1650）による座標の導入や，ニュートン（1643–1727）やライプニッツ（1646–1716）による微分積分の理論，関数概念の発達により，一般の様々な曲面を表現し，研究する方法へと繋がっていき，そしてガウス（1777–1855）によって爆発的かつ現代的な発展を遂げることになります．

本稿の目的は，大学初年度の数学の知識を仮定した上で，ガウスによる曲率の研究を含めた，曲面の幾何に関する基本事項を概観することにあります．なにぶん長い歴史のある分野であるため，この場で新しく付け加える（付け加えられる）事項は残念ながらありません．このあとに続く，様々な理論に関する記事への準備体操となれば幸いです．

2. 曲面の表し方

曲面を表す方法としては，次のようなものが代表的であり，古典的に知られていました：

(i) 2 変数の滑らかな*1)実数値関数のグラフとしての表示；

(ii) 2 つのパラメータを使った表示；

(iii) 滑らかな 3 変数関数の零点集合としての表示.

これらの特徴を順番に見ていきましょう.

2 変数の滑らかな実数値関数 $f(x,y)$ が与えられたとします. f の定義域は, 半径が 1 の円の内部など, $\mathbb{R}^2$ のある領域 D であるとします. いま, f の**グラフ**

$$S_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D\}$$

をユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合として考えますと, S_f は曲面となっています. この表示では z 座標が特別扱いをされていますが, $(x,f(x,z),z)$, $(f(y,z),y,z)$ といった点の集まりを考えることもでき, 同様に曲面が得られます（それぞれ S_f とどのような関係にあるでしょうか). 上のように与えられた曲面（**曲面片**とも呼ばれます）は, f の定義域 D に被さるシートのような形をしており（図 2), とくに曲面上の点は D の点 (x,y) と一対一に対応しています. 一つの関数 f の振舞いを調べることで曲面 S_f の形を理解することができるため, グラフによる表示は非常に簡明で強力な方法であると言えるでしょう. しかしながら, シートのような形になっているという記述からも明らかなように, 半径 1 の球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

などといった閉じた曲面を表現しようと思うと, 一つの関数のグラフとしては表すことができません. この例では $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ で定義された 2 つの関数

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2},$$
$$g(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

が必要となってしまいます.

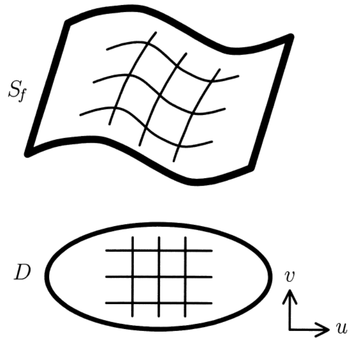


図 2 関数 f のグラフ.

そこで次に, x, y 座標についても自由度を与えてみることにします. すなわち, 3 つの滑らかな 2 変数関数 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ を用いて,

$$p(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

として曲面を表示することを考えます. これが (ii) の**パラメータ**を使った表示と呼ばれる方法です. なお, $x=u$, $y=v$ とすると, (i) のグラフによる表示法と一致します.

いま, 固定された a, b に対して, $p(u,b)$, $p(a,v)$ が $p(a,b)$ を通る曲面上の曲線を定めることに注意しますと, $p_u(a,b)$, $p_v(a,b)$ は*2)点 $p(a,b)$ における S の接ベクトル（を原点に平行移動したもの）となることがわかります. なお, $p(u,v)$ が点 $p(a,b)$ の近くでちゃんと曲面片を定義するためには, 接ベクトル $p_u(a,b)$, $p_v(a,b)$ がともに零ベクトルでなく, 互いに平行でないということが必要十分です. 球面 S^2 の場合, 2 つのパラメータ $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ を用いて

$$x = \sin\theta\cos\varphi, \quad y = \sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta$$

と極座標表示することができます. 積分をするときなど, この座標を使えば十分なのですが, $\theta = 0, \pi$ のときに一対一対応でない部分があり, 注意が必要になるときがあります. また, 一般に, パラメータ表示された曲面がどのような形をしているかはすぐにはわかりません.

もう一つの表示法 (iii) として, 3 変数関数 F:

*1) 簡単のため, 本稿では「滑らか」とは無限回微分可能を意味することとします.

*2) 関数の右下に変数を書いた場合はその変数に関する偏微分を表すものとします.

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を考え，

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

を考えるというものがあります．球面 S^2 を表す関数は定義のところですでに出ているように $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ です．この表示法を用いるときに気をつけなければならないのは関数 F の選択です．顕著な例は $x^2+y^2+z^2-c$ です．$c>0$ のときは，半径 $\sqrt{c}$ の球面を表しますが，$c=0$ のときは $(0,0,0)$ の一点のみ，$c<0$ のときは空集合のみとなってしまいます．それでは，どのようなときに F が曲面を定めるのでしょうか．鍵となるのは**陰関数定理**です．定理の内容は多変数関数の微分積分に関する教科書[2]を見ていただくことにして，定理と曲面の関連を見てみましょう．

いま，点 (a,b,c) において，$F(a,b,c) = 0$, $F_z(a,b,c) \neq 0$ であったとします．このとき，陰関数定理より，点 (a,b) の近傍 D で定義された関数 $h(x,y)$ であって，$c = h(a,b)$ かつ $F(a,b,h(a,b)) = 0$ となるものがただ一つ存在します．このとき，h のグラフ $S_h = \{(x,y,h(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D\}$ を考えると，これは S の部分集合であり，D に被さる曲面を定めています．一方で，関数 h の一意性より，S_h の十分近くには S_h 上の点以外に S の点が存在しないことが従います．したがって S は点 (a,b,c) の近くでは $z=h(x,y)$ のグラフとして与えられる曲面の形をしていると結論できるのです．なお，陰関数定理において F_z に関する仮定を F_x, F_y に取り替えると，それぞれ $x=h(y,z)$, $y=h(x,z)$ となる関数の存在がわかり，上と同様の議論を行うことができます．

例1 関数 $F(x,y,z) = x^2+y^2-1$ が定める図形 C を考えます．$F_y(x,y,z) = 2y$ より，$F(x,y,z) = F_y(x,y,z) = 0$ となる $X = \{(\pm 1, 0, z) \in C\}$ 以外の点の近くでは C を局所的に $(x, \sqrt{1-x^2}, z)$ もしくは $(x, -\sqrt{1-x^2}, z)$ とグラフの形で表示できます．同様に $F(x,y,z) = F_x(x,y,z) = 0$ となる $Y = \{(0, \pm 1, z) \in C\}$ 以外の点の近くでは局所的に $(\pm\sqrt{1-y^2}, y, z)$ と表示できます．$X \cap Y = \emptyset$ なので，結局 C の各点の近くで関数のグラフの形をしていることが従い，C 全体が曲面となっていることがわかります（もちろん C は円柱です）．

さて，関数 $F(x,y,z)$ に対し，

$$F_x(x,y,z) = F_y(x,y,z) = F_z(x,y,z) = 0$$

を満たす点を F の**特異点**と呼びます．合成関数の微分の公式を使うと，特異点はどんな変数変換をしても特異点のままであることがわかります．すなわち，特異点は $F(x,y,z)=0$ が定める図形 S そのものが持つ特別な点であると言えます．特異点の周りでの S の形は様々であって，大変興味深い研究対象となっています．

3. ガウス曲率

前節で述べた曲面の表示法にはそれぞれ一長一短がありましたが，どれも同じ曲面（片）を表していることに代わりはありません．それらを用いて曲面本来の量を取り出すには，パラメータの取り方に依存しない量を考える必要があります．その代表格として知られているのが，ガウスによる**曲率**の概念です．紙面の都合もあるので，ここでは天下り的に定義を与えたいと思います．詳しくは小林先生の教科書[1]を参照して下さい．

いま，$\mathbb{R}^3$ の中にある曲面 S が点 $(a,b,c) \in S$ の近くで局所的に

$$p(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

とパラメータ表示されているとします．簡単のため，p の定義域は原点 $(0,0)$ を含む $\mathbb{R}^2$ の領域であるとし，$p(0,0) = (a,b,c)$ と仮定します．このパラメータ表示から得られる接ベクトルを用いて，いま

$$E = p_u \cdot p_u,$$

$$F = p_u \cdot p_v,$$

$$G = p_v \cdot p_v$$

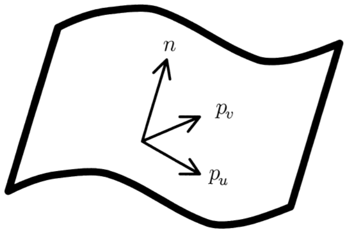


図 3　接ベクトルと単位法線ベクトル．

という量を考えます（図 3）．ここで，$\cdot$ は $\mathbb{R}^3$ における通常の内積です．こうして定めた E, F, G を**第一基本量**と呼びます．ベクトルに関するシュワルツの不等式により

$$EG - F^2 = \|p_u\|^2\|p_v\|^2 - (p_u \cdot p_v)^2 > 0$$

が成り立っています（p_u と p_v は平行でないことに注意して下さい）．なお，E, F, G は p と同じ定義域を持つ関数となっており，座標の取り方に大きく依存しています．実際，$q(0,0) = (a,b,c)$ を満たすもう一つのパラメータ表示 $q(\xi,\eta)$ があったとすると，$(0,0)$ の近くにおいて，$q(\xi,\eta) = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ を満たすような変数変換 $u = u(\xi,\eta)$, $v = v(\xi,\eta)$ が存在します．このとき，合成関数の微分法を用いて

$$\begin{aligned} q_\xi &= \frac{\partial}{\partial\xi}(p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))) \\ &= p_u(u,v)u_\xi + p_v(u,v)v_\xi \end{aligned}$$

などといった計算をすれば，

$$\begin{pmatrix} E_q & F_q \\ F_q & G_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

となることがわかります．ここで，E_p たちは p によるパラメータ表示をしたときの第一基本量（E_q たちについても同様），行列の右上にある ^{T} は転置行列を表すものとします．この結果を踏まえて，パラメータによる依存性を除くためには，次のような**第一基本形式**

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

と呼ばれる**微分形式**を用いる必要がありますが，詳しくは割愛します．

定義を続けます．曲面 S の各点において

$$n = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$$

というベクトルを考えます（図 3）．ここで，$p_u \times p_v$ は右手系における p_u と p_v の外積です．外積の定義からわかるように，n は S の**単位法線ベクトル**となっています．これを用いて

$$\begin{aligned} L &= p_{uu} \cdot n, \\ M &= p_{uv} \cdot n, \\ N &= p_{vv} \cdot n \end{aligned}$$

という量を考えます．L, M, N を**第二基本量**と呼びます．先ほどと同様にパラメータの取替えに関する計算をしてみると，第二基本量は L, M, N の符号を一斉に反対にする可能性があるという部分を除いて，第一基本量と同じ変換公式を持つことがわかります．同様に，**第二基本形式**

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

が符号を除いてパラメータに依存しない形で定義されます．以上の準備の下で，点 $(a,b,c) = p(0,0)$ での**ガウス曲率**は

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

によって定義されます．基本量たちの，パラメータ表示を変えたときの変換公式より次が従います．

定理 1　K は局所的なパラメータの取り方に依存せず，曲面 S 上の実数値関数を定める．

4. ガウス曲率の意味

この節では，具体的な例の計算を通して，ガウス曲率の意味を見てみましょう．

例 2（トーラス）　(x,z)-平面において $(3,0)$ を中

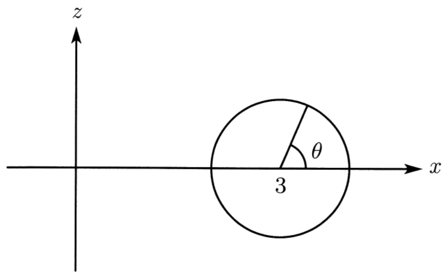


図4　円 $(x-3)^2+z^2=1$ とパラメータ θ.

心とする半径1の円 $(x-3)^2+z^2=1$ (図 4) を z 軸を中心に回転して得られる曲面を T とします．T はトーラスと呼ばれるドーナツの形をした曲面となっており，

$$x(\theta,\varphi)=(3+\cos\theta)\cos\varphi,$$
$$y(\theta,\varphi)=(3+\cos\theta)\sin\varphi,$$
$$z(\theta,\varphi)=\sin\theta$$

とパラメータ表示されます．このとき，

$$p_\theta=(-\sin\theta\cos\varphi,-\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta),$$
$$p_\varphi=(-(3+\cos\theta)\sin\varphi,(3+\cos\theta)\cos\varphi,0),$$
$$p_{\theta\theta}=(-\cos\theta\cos\varphi,-\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta),$$
$$p_{\theta\varphi}=(\sin\theta\sin\varphi,-\sin\theta\cos\varphi,0),$$
$$p_{\varphi\varphi}=(-(3+\cos\theta)\cos\varphi,-(3+\cos\theta)\sin\varphi,0),$$
$$n=(-\cos\theta\cos\varphi,-\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta)$$

となり，基本量は

$$E=1,\quad F=0,\quad G=(3+\cos\theta)^2,$$
$$L=1,\quad M=0,\quad N=(3+\cos\theta)\cos\theta$$

と計算されます．これより，ガウス曲率 K は

$$K=\frac{(3+\cos\theta)\cos\theta}{(3+\cos\theta)^2}=\frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}$$

で与えられることがわかります．この式より T の稜線 $\{(3\cos\varphi,3\sin\varphi,\pm1)\mid 0\le\varphi\le 2\pi\}$ で $K=0$ であり，それを境として“ドーナツの穴”の内側では $K<0$，外側では $K>0$ となっていることがわかります．

この例が示すように，曲率は大きく，正，零，負

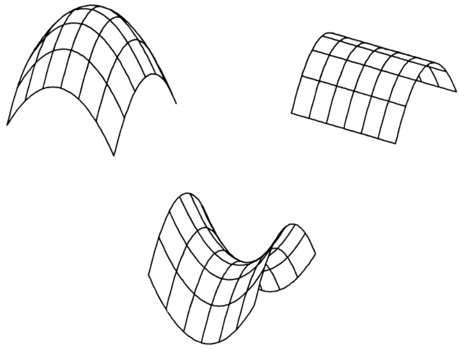


図 5　$K > 0$ (左上), $K = 0$ (右上), $K < 0$ (下) となる曲面片 (図は KETpic を使用).

のときに分かれ，それらの値を持つ点の近くでは，それぞれ凸状,（ある方向について）直線状，鞍状の形をしています．このことを裏付けるように，半径 r の球面については，いたるところで $K = r^{-2}$，柱面 $F(x, y) = 0$（z とは無関係の関数から得られる曲面）については，いたるところで $K = 0$ となっていることが確かめられます．

5. Theorema egregium

ガウスは曲率に関する研究の中で次のような結論に至りました．

定理 2（Theorema egregium）　ガウス曲率 K は第一基本量とその 2 階までの偏微分を用いて表すことができる．

定理の名前は訳すと「驚異の定理」となります．実際の定理は K の具体的な表示まで述べているのですが，とても長い式のため，ここでは割愛します．この定理のどこが驚異なのでしょうか．K は定義により，第一基本量（形式）と第二基本量（形式）から決まります．前者はパラメータ表示の 1 階微分どうしの内積をとることで得られ，後者はパラメータ表示の 2 階微分と単位法線ベクトルとの内積をとることで得られます．いま，第一基本形式が，曲面 S が $\mathbb{R}^3$ のどの位置にあるかについては全く依存せず，その接ベクトルの内積の情報のみで定義され得る量であるという事実に注目します．「驚異の定理」はガウス曲率もまたそのような量だと主張しているのです．

前節で見たように曲率は私たちの眼に見える凸状，鞍状といった形ときれいに対応しています．そのように見ていると，ガウス曲率は曲面の位置が決まることで定義が可能なように感じられます．しかし，実際はそうではなかったというわけです．逆に考えると，いたるところで局所的に（しかるべき意味で）滑らかに 2 変数でパラメータ表示されている集合（抽象的な意味での曲面）があったときに，それらの接ベクトルでの内積の定め方，すなわち第一基本形式を与えれば，曲率が決まり，その曲面の上での幾何が展開できるというわけです．第一基本形式は曲面自身が所有すべき量であり，曲面の持つ「内在的な」情報だけで幾何が展開できるというわけです．このような考え方はリーマンによる画期的な図形の捉え方（多様体）の提唱を経て，現代の幾何（**リーマン幾何**）の根底をなしています．

例 3　半径 1 の円板の内部 $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ において

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$$

という第一基本形式を与えると，D^2 のいたるところで $K = -1$ となることがわかります．この基本形式の下で展開される幾何を**双曲幾何**と呼びます．平行線の公理が成り立たない**非ユークリッド幾何**としても知られています．一方で，球面 S^2 において $\mathbb{R}^3$ の内積から誘導される第一基本形式を与えると，前節で述べたように，いたるところで $K = 1$ となりますが，そこで展開される幾何を**球面幾何**と呼びます．最後に，ユークリッド平面など，いたるところで $K = 0$ となる曲面で展開される幾何を**ユークリッド幾何**と呼びます．

6. 面積と曲率

第一基本形式が与えられた曲面 S において，

$$dA = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

という微分形式を考えると，これはパラメータ $p(u,v)$ の取り方に依存しません．dA は**面積要素**と呼ばれ，これを用いて曲面の面積が

$$\mathrm{Area}(S) = \int_S dA$$

として計算されます．とくに，曲面の第一基本形式が $\mathbb{R}^3$ の内積から誘導されるものであった場合，この面積は通常の意味での面積と一致します．

さて，ガウス曲率 K は曲面 S 全体で定義された関数となっていました．それでは，K を曲面全体で面積分するとどうなるでしょうか．K も面積要素 dA もどちらも第一基本形式のみに依存しているものでした．簡単のため，いまは球面やトーラスといった，向き付け可能な閉じた曲面（詳しくは省略します）を考えることにします．

定理 3（ガウス–ボンネの定理）S を向き付け可能な閉じた曲面とするとき，**任意の**第一基本形式に対して，

$$\int_S K\, dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ．

ここで，$\chi(S)$ は**オイラー標数**と呼ばれる，曲面の位相的な量（整数）であって，球面は 2，トーラスは 0 という値をとります．一般に g 人乗りの浮き袋の表面と同じ形（位相同型）の曲面 S に対し，$\chi(S) = 2 - 2g$ となります．等式の左辺は純粋に幾何学的な量であって，それが曲面の“つながり方”という位相的な量に結びつくという大変深い内容を持つ定理であり，その後，この定理をお手本として，様々な理論が生み出されてきたということは言うまでもありません．

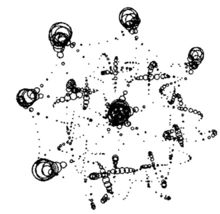
参考文献

1) 小林昭七，『曲線と曲面の微分幾何（改訂版）』，裳華房，1995.
2) 小林昭七，『続 微分積分読本—多変数—』，裳華房，2001.

（さかさい・たくや，東京工業大学大学院理工学研究科）

代数曲線

実2次曲線から複素射影平面代数曲線へ



小木曽 啓示

1. はじめに

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において方程式 $ax^2+bxy+cy^2+lx+my+n=0$ （a,b,c,l,m,n は定数で a,b,c の少なくとも1つは0ではない）で表される曲線を（実）**2次曲線**と言う．空集合になったり1点のみになったりする病的な場合を除けば，2次曲線は文字通り曲線である．なぜ曲線であるはずの2次曲線が“曲面の不思議”のテーマなのか不思議に思う読者の方も多いと思うが，考える数の範囲を複素数にまで広げ，さらに“無限の彼方”を付け加えた複素射影平面と呼ばれる空間にまで拡張して考えると，自然に2次曲線は閉じた曲面（実2次元的図形）になるのである．本稿の目的は，このあたりの仕組みから始めていくつかの複素射影曲線の形を明らかにすることで，代数幾何的な考察の面白さの一端を大学初年級程度の方々にもお伝えすることである．

2. 放物線から2次複素射影平面代数曲線へ

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において放物線 $C: y=x^2$ と直線 $L: y=2ax+b$ の交点を考えよう．交点の x 座標は $x^2-2ax-b=0$ の実数解だから，$D/4=a^2+b$ の符号（正，0，負）に従って，交点は2点，1点，0点である．$D<0$ の場合には，数の範囲を複素数にまで拡張した2次元複素平面 $\mathbf{C}^2$ において（とりあえずは形式的に考えれば），$(x,y)=(a\pm\sqrt{|a^2+b|}i, (a\pm\sqrt{|a^2+b|}i)^2)$ の2点が“交点”となる．$D=0$ の場合，すなわち，L が $y=2a(x-a)+a^2$ の場合には，$\mathbf{C}^2$ に広げても交点は増えず，依然として1点 (a,a^2) のままである．しかし，直線 L の傾き a を少し変えた直線 $L_\varepsilon: y=(2a+\varepsilon)(x-a)+a^2$ と C の交点を考えると，ただ1つであった交点 (a,a^2) は，2つの交点 $(a,a^2), (a+\varepsilon,(a+\varepsilon)^2)$ に分裂する．$\varepsilon\to 0$ のとき，$(a+\varepsilon,(a+\varepsilon)^2)\to(a,a^2)$ だから，C と L の交点は，これら2つの交点が重なって1点になったもの，つまり**重複度**が2の交点であると考えられる（図1）．重複度を込めた意味での交点数は2なのである．

一般に次が成り立つ．

定理1（代数学の基本定理） n を正の整数とする．複素数を係数とする n 次方程式は重複度も込めてちょうど n 個の複素数解をもつ．

では，複素数の範囲にまで拡張し，さらに重複度も考えれば，放物線と直線の交点数はいつでも

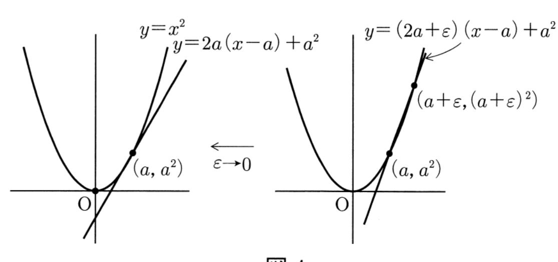


図1

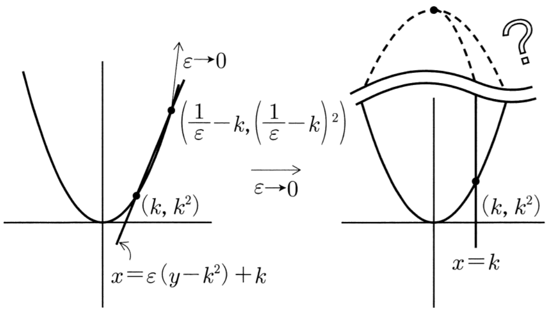


図 2

2 点であると言えるだろうか？ 答は No である．放物線 C と直線 $V: x = k$ の交点は (k, k^2) の 1 点のみであり重複度も 2 には見えないからである．先の場合に習い，直線 V を少しだけずらした直線 $V_\varepsilon : x = \varepsilon(y - k^2) + k$ を考えてみよう．C と V_ε の交点は (k, k^2) と $(1/\varepsilon - k, (1/\varepsilon - k)^2)$ の 2 つになる．V_ε を V に近づけるとき，すなわち，$\varepsilon \to 0$ とするとき，交点 $(1/\varepsilon - k, (1/\varepsilon - k)^2)$ はどんどん遠くのほうにいってしまう．見方を変えると，“視界に入らない無限の彼方” があって，直線 V は “無限の彼方” において C と交わっているようにも見えるのである（図 2）．

定義 1 少なくとも 1 つは 0 でない 3 つの数の比 $[a : b : c]$ 全体からなる集合を**射影平面**と言う．ここで，2 つの比 $[a : b : c]$ と $[a' : b' : c']$ が等しいのは，$(a, b, c) = k(a', b', c')$ である数 $k \neq 0$ があるときであると約束する．例えば，$c \neq 0$ ならば $[a : b : c] = [a/c : b/c : 1]$ である．数 a, b, c, k の範囲を実数のみに限定してえられる射影平面を $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ と書き，**実射影平面**と言う．また，数 a, b, c, k の範囲を複素数まで広げて得られる射影平面を $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ あるいは単に $\mathbf{P}^2$ と書き，**複素射影平面**と言う．

感覚をつかむために，$\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ をもう少し詳しく見てみよう．対応 $(a, b) \mapsto (a, b, 1)$ により，座標平面と座標空間内の平面 $Z = 1$ を同一視する．原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ から座標平面 $Z = 1$ を見ることを考えよう．視線方向を $[a : b : c]$ とすると，$c \neq 0$ のときのみ平面上の点が見える．このとき見える点は $(a/c, b/c, 1)$ である．こうして，点と視線方向の対応 $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$ により，平面全体を射影平面の部分集合 $\{[a : b : c] \mid c \neq 0\}$ と同一視できる．また，$[p : q : 0]$ 方向には平面上の点は見えないが，この方向は原点と平面上の点 $(pa, qa, 1)$ を結ぶ視線方向 $[pa : qa : 1] = [p : q : 1/a]$ の $a \to \infty$ における極限であり，無限の彼方にある点 “$\lim_{a\to\infty}(pa, qa)$” を表していると考えられる．つまり，$\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ は，通常の平面 $\mathbf{R}^2 = \{[p : q : r] \mid r \neq 0\}$ に**無限遠点**全体 $\{[p : q : 0] \mid \mathbf{R}^2 \ni (p, q) \neq (0, 0)\}$ を付け加えてできた図形なのである．直感的認識は難しくなるが，式による説明はそのまま複素数の場合にも適用でき，$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) = \mathbf{P}^2$ は，2 次元複素平面 $\mathbf{C}^2 = \{[p : q : r] \mid p, q, r \in \mathbf{C}, r \neq 0\}$ に，無限遠点全体 $\{[p : q : 0] \mid \mathbf{C}^2 \ni (p, q) \neq (0, 0)\}$ を付け加えてできた図形である．

$\mathbf{P}^2$ における “放物線” $y = x^2$ と “直線” $x = k$ の方程式を調べてみよう．点 $[X : Y : Z]$ が $y = x^2$ 上の点であるのは $Z \neq 0$ かつ $Y/Z = (X/Z)^2$ をみたすときである．分母を払った方程式は $YZ - X^2 = 0$ となるが，この式は $Z = 0$ でも意味を持った式である．その結果，射影平面における曲線 $YZ - X^2 = 0$ は “放物線” $y = x^2$ に無限遠点 $[0 : 1 : 0]$ が付け加わった図形になる．同様に，$\mathbf{P}^2$ において，直線 $x = k$ は，無限遠点 $[0 : 1 : 0]$ が付け加わった図形 $X - kZ = 0$ に拡張される．こうして $YZ - X^2 = 0$ と $X - kZ = 0$ の交点は $(k : k^2 : 1)$ と無限遠点 $(0 : 1 : 0)$ の 2 点となる．このように，射影平面においては，“無限の彼方” が数学的に式で捉えられる．

A を 3 次複素可逆行列とする．対応 $P \mapsto AP$（ここでは，射影平面の点 P は縦ベクトル表示している）は射影平面 $\mathbf{P}^2$ の**自己同型**を定める．この自己同型を可逆行列 A で与えられる**射影変換**と言う．逆写像は逆行列 A^{-1} によって与えられる射影変換である．任意の 2 点 P, Q に対して $Q = AP$ である 3 次可逆行列 A がある（射影平面の**等質性**）．特に，$\mathbf{P}^2$ においては，平面 $\mathbf{C}^2$ の点も無限遠点もすべて対等ということになる．

以下，複素射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内の “曲線” を考える

ことにしよう．比のみが意味をもつため，$\mathbf{P}^2$ において意味のある方程式は**同次方程式**である．

定義 2　0 でない d 次同次多項式 $F(X,Y,Z)=\sum_{i+j+k=d} a_{ijk}X^iY^jZ^k$ （i,j,k は 0 以上の整数，a_{ijk} は複素数）に対し，$\mathbf{P}^2$ の部分集合 $\{[a:b:c]\in\mathbf{P}^2\,|\,F(a,b,c)=0\}$ を $F(X,Y,Z)$ で定まる d 次**複素射影平面代数曲線**（あるいは単に曲線）等と言い，$(F=0)$ と表す．$X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$ のように，$F(X,Y,Z)$ がより低い次数の多項式の積の形に因数分解されるとき，曲線 $(F=0)$ は**可約**であると言う．$F(X,Y,Z)$ は同次多項式なので，その因数も同次多項式である．$F(X,Y,Z)$ が因数分解できないとき，曲線 $(F=0)$ は**既約**であると言う．$F(X,Y,Z)$ を因数分解することにより，曲線は有限個の既約な曲線の和集合になる．曲線 $(F=0)$ の点 P において，$F_X(P)=F_Y(P)=F_Z(P)=0$ であるとき，P を**特異点**，そうでないとき**滑らかな点**と言う．特異点を持たない曲線を**滑らか**，あるいは**非特異**であると言う．

例えば，曲線 $(YZ-X^2=0)$ は滑らかな曲線である．また，曲線 $(F=0)$ が P において滑らかであるとき，$F_X(P)X+F_Y(P)Y+F_Z(P)Z=0$ は P における曲線の**接線**である．

次は代数学の基本定理の複素射影平面版とも言える定理であり，この定理により，複素射影曲線を考えることの自然性が認識されるようになったと思われる．

定理 2（ベズーの定理）　$\mathbf{P}^2$ 内のどの 2 つの曲線も必ず交わる．また，異なる m 次既約曲線と n 次既約曲線は重複度を込めてちょうど mn 個の点で交わる．

では，複素射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内の曲線 $(F=0)$ はどのような図形であろうか？ まず言えることは，放物線や円といった曲線的（実 1 次元的）な図形ではなく，球面 S^2 やドーナッツの表面のような曲面的（実 2 次元的）な図形であるはずだということである．次元の厳密な定義は省略するが，感覚的には局所的に自由に動けるパラメーターの個数が**次元**である．例えば，$\mathbf{P}^1:=\{[X:Y]\,|\,\mathbf{C}^2\ni(X,Y)\neq(0,0)\}$（**複素射影直線**）は，$\mathbf{C}$ に無限遠点である $[1:0]$ を付け加えて得られる図形であり，特に複素 1 次元的，従って実 2 次元的である．曲線 $(F=0)$ は，射影変換により，$Z^d+f_1(X,Y)Z^{d-1}+\ldots+f_d(X,Y)$ （$f_i(X,Y)$ は X, Y の i 次同次式）の形の多項式で表される曲線（C とする）に変換できる．C の点は，比 $[X:Y]$ を定めるごとに重複度を込めて d 個ずつ定まる（代数学の基本定理）．従って，曲線 C の次元は $\mathbf{P}^1$ の次元と等しく，複素 1 次元的，従って実 2 次元的なのである．

以下，複素射影平面代数曲線を次数ごとに詳しく見ていこう．

3. 2 次複素射影平面代数曲線

$\mathbf{P}^2$ 内の 1 次曲線 $(aX+bY+cZ=0)$ は，射影変換により曲線 $(Z=0)$ に変換される．さらに，対応 $[s:t:0]\leftrightarrow[s:t]$ により，曲線 $(Z=0)$ は $\mathbf{P}^1$ に変換される．つまり，1 次曲線は代数的には $\mathbf{P}^1$ と同型である．$\mathbf{P}^1$ は，円板 $\{[z:1]\,|\,|z|\leq 1\}$

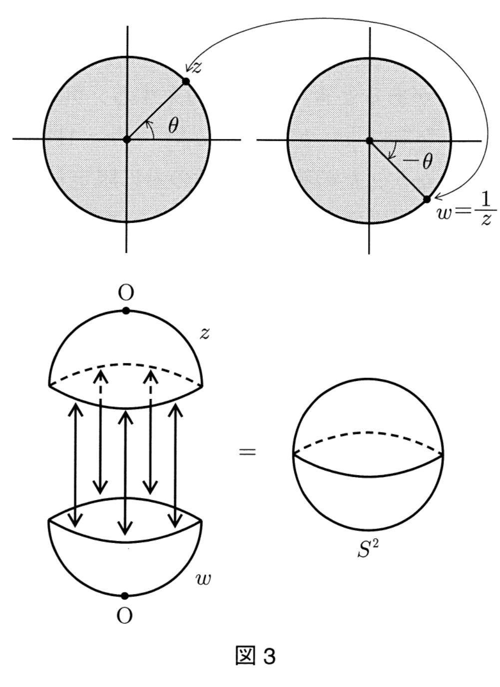


図 3

と円板 $\{[1:w]\,|\,|w|\leq 1\}$ が，その周上で $z=1/w$ により張り合わせて得られる図形でもある．特に，2 次元球面 S^2 の形（S^2 と同相）である．1 次式で表される図形が球面になってしまうというのは少し意外な感じのする結果であると思う（図 3）．

次に，$\mathbf{P}^2$ 内の 2 次曲線

$$C := (a_1X^2 + a_2Y^2 + a_3Z^2 + 2b_{12}XY + 2b_{13}XZ + 2b_{23}YZ = 0)$$

の形状を調べてみよう．行列の計算法則を利用すると，C の方程式は

$$(X,Y,Z)A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & a_2 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & a_3 \end{pmatrix}$$

と書き直すことができる．行列 A は対称行列だから，1 行に 2 行の 3 倍を足したら，次に 1 列に 2 列の 3 倍を足すというように，同じタイプの行基本変形と列基本変形を交互に施していくことで，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のいずれかに変換できる．すなわち，可逆行列 P をうまく選べば，P^tAP（P^t は転置行列）がこれら 3 つのいずれかになる．従って，P^{-1} で与えられる射影変換により，2 次曲線 C は，次の 3 つの 2 次曲線

(i) $(YZ - X^2 = 0)$，　(ii) $(YZ = 0)$，
(iii) $(Z^2 = 0)$

のいずれかに変換される．(i) は C が既約な場合で，(ii), (iii) は可約な場合である．(ii) の曲線 $(YZ = 0)$ は，$(Y = 0)$ と $(Z = 0)$ の合併，すな

わち，点 $[1:0:0]$ において横断的に交わる 2 枚の $\mathbf{P}^1$ であり，交点が特異点である．(iii) の曲線 $(Z^2=0)$ は，$\mathbf{P}^1$ が 2 重に重なった曲線であり，見方によってはすべての点が特異点である曲線である．(i) の曲線 $(YZ-X^2=0)$ について調べてみよう．改めてこの曲線を C とする．C は滑らかな曲線である．また，自明な等式 $(st)^2=s^2t^2$ は写像

$$\mathbf{P}^1 \to C, \quad [s:t] \mapsto [st:s^2:t^2]$$

が定まることを意味し，$[X:Y:Z] \mapsto [X:Z] = [Y:X]$ がその逆写像を与える．従って，曲線 $(YZ-X^2=0)$ は，$\mathbf{P}^1$ と代数的にも解析的にも同型である．特に実 2 次元の図形としては，2 次元球面 S^2 と同相になる．

射影変換は次数を保つから，射影変換で 2 次曲線を 1 次曲線に変換することはできない．射影変換に加え，高次の式で表される写像も考えること（代数幾何学的考え方）によってはじめて，既約 2 次曲線が $\mathbf{P}^1$ と同型であることがわかったことにも注意しておく．

4. 3 次複素射影平面代数曲線 $(+\varepsilon)$

次に射影平面内の 3 次曲線の形状を調べよう．3 次同次多項式 $\sum_{i+j+k=3} a_{ijk}X^iY^jZ^k$ は，10 個の単項式

$$X^3, X^2Y, X^2Z, XY^2, XYZ,$$
$$XZ^2, Y^3, Y^2Z, YZ^2, Z^3$$

の複素数係数一次結合であり，3 次曲線の記述には，見かけ上 10 個の複素パラメーター a_{ijk} が必要である．他方，3 次可逆行列は 9 個のパラメーターをもつから，3 次曲線を射影変換による違いを除いて記述するためのパラメーターは $10-9=1$ 個で十分であることが期待される．

定理 3　滑らかな 3 次曲線は次のいずれかの曲線に射影変換でうつされる：

$$(*)\ C_\lambda := (Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z)=0) \quad (\lambda \neq 0,1).$$

滑らかではない 3 次曲線は次の (1)–(8) のいずれかの曲線に射影変換でうつされる：

(1) $(X^3=0)$，　(2) $(X^2Y=0)$，

(3) $(XYZ=0)$，　(4) $(XY(X-Y)=0)$，

(5) $((YZ-X^2)X=0)$，

(6) $((YZ-X^2)Z=0)$，

(7) $(Y^2Z-X^2(X-Z)=0)$，

(8) $(Y^2Z-X^3=0)$．

形からもわかるように，(1)–(6) は可約な場合であり，(7), (8) は既約な場合である．また，(7), (8) ともに特異点は $[0:0:1]$ である．

証明の概略は次の通りである．可約な場合は容易である．(3) は 3 つの射影直線 $\mathbf{P}^1$ が異なる 3 点で交わる場合であり，(4) は 1 点で交わる場合である．(5) は射影直線 $\mathbf{P}^1$ と既約 2 次曲線 $\mathbf{P}^1$ が 2 点で交わる場合であり，(6) は 1 点で接する場合である．

以下 $C=(F=0)$ を既約な 3 次複素射影曲線とする．C の**ヘッセ曲線** $(H=0)$

$$H(X,Y,Z) := \det \begin{pmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_{XZ} \\ F_{XY} & F_{YY} & F_{YZ} \\ F_{XZ} & F_{YZ} & F_{ZZ} \end{pmatrix}$$

を考え，$P \in (F=0)\cap(H=0)$ とする．ベズーの定理によりこのような点 P は確かに存在する．また，P が C の滑らかな点であれば，P は C の**変曲点**，すなわち，P における C の接線 $F_X(P)X+F_Y(P)Y+F_Z(P)Z=0$ は P で C に 3 重以上に接する．射影変換により，$P=[0:1:0]$ としてよい．P で C が滑らかな場合には，さらに射影変換して P での接線を $(Z=0)$，つまり，$F_X(P)=F_Y(P)=0$, $F_Z(P)\neq 0$, としてよく，さらに変曲点であることから $F_{XX}(P)=0$ となる．また，$P=[0:1:0]$ が C の特異点であれば，$F_X(P)=F_Y(P)=F_Z(P)=0$ である．以

上から，$P=[0:1:0]$ で C が滑らかであれば，C の式は $YZ(aX+bY+cZ)=f(X,Z)$ $(b\neq 0,\ f(X,Z)$ は $X\ Z$ の同次3次式）としてよく，$P=[0:1:0]$ が C の特異点であれば，C の式は $Y(aX^2+bXZ+cZ^2)=f(X,Z)$（$f(X,Z)$ は X,Z の同次3次式）としてよいことがわかった．

第1の場合には，さらに $[X:Y:Z]\mapsto[X:\alpha X+Y+\beta Z,Z]$ の形の射影変換を施して，$Y^2Z=f(X,Z)$ の形にできる．$f(X,Z)$ は X,Z の同次3次多項式なので3つの同次1次式の積に分解される．このとき，射影変換で $(*)$, (7) または (8) の形にできることは容易である．

第2の場合には，既約性の仮定から $aX^2+bXZ+cZ^2$ は0ではなく，判別式が0か0でないかに応じて $YZ^2=f(X,Z)$ あるいは $XYZ=f(X,Z)$ の形の曲線に射影変換でうつされる．さらに $[X:Y:Z]\mapsto[X:\alpha X+Y+\beta Z,Z]$ の形の射影変換を施して，$YZ^2=(aX+cZ)^3$ あるいは $XYZ=(aX+cZ)^3$ の形にできる．既約性により最初の場合は $a\neq 0$ であり，第2の場合は $a\neq 0$ かつ $c\neq 0$ である．いずれの場合も $[X:Y:Z]\mapsto[\alpha X+\beta Z:Y:\gamma X+\delta Z]$ で与えられる射影変換を施した後，X,Y,Z を並べ変え定数倍する射影変換を施すことで，(8) の形にできる．（概略終）

既約な場合（$(*)$, (7), (8) の場合）に3次曲線がどんな形をしているか調べよう．

(8) の場合，写像 $\varphi:\mathbf{P}^1\to C$; $[s:t]\mapsto[s^2t:s^3:t^3]$ は，逆写像も連続な全単射正則写像であり，C は $\mathbf{P}^1$ と同相になる．また，φ の微分は $[0:1]$ で0になり，$\varphi([0:1])=[0:0:1]$ において，C は尖った形の特異点（尖点）をもつ（図4上）．

(7) の場合，写像 $\varphi:\mathbf{P}^1\to C$; $[s:t]\mapsto[s^2t+t^3:s^3+st^2:t^3]$ は，特異点 $[0:0:1]$ の逆像のみが2点 $[i:1]$, $[-i:1]$ で，それ以外の部分では同型な写像である．また，特異点 $[0:0:1]$ の近くでは，曲線は $y=\pm x$ で表される $\mathbf{C}^2$ 内の曲線と解析的に同型であり，2枚の $\mathbf{C}$ が原点にお

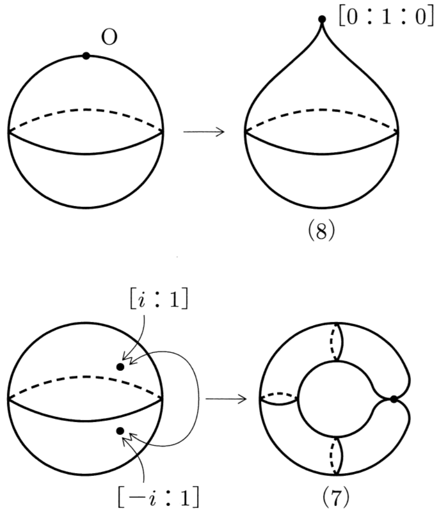
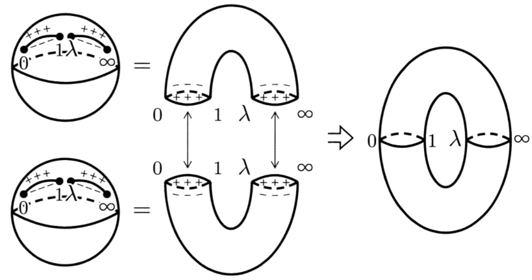


図 4



（切り口にそって開いたもの）

図 5

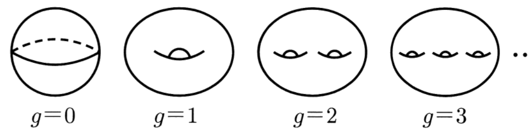


図 6

いて横断的に交わった形状をしている．このことから，C は球面 S^2 の 2 点を横断的に張り合わせて得られる実曲面と同相である（図 4 下）．

$(*)$ の場合を考えよう．写像 $\varphi : C_\lambda \to \mathbf{P}^1$; $[X:Y:Z] \mapsto [X:Z]$（ただし $[0:1:0]$ の像は $[1:0]$）を考えよう．この写像は曲線 C_λ の点 P に，P と $[0:1:0]$ を結ぶ射影直線と $(Y=0)$ の交点を対応させる写像であり，代数的な写像である．また，$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の 4 点 $[0:1]$, $[1:1]$, $[\lambda:1]$, $[1:0]$ の逆像はそれぞれ 1 点ずつで，それ以外の点の逆像は 2 点ずつである．このことから，C_λ は，0 と 1 を結ぶ線にそった切れ目，λ と ∞ 結ぶ線に沿った切れ目の入った，2 枚の $\mathbf{P}^1$ を用意して，これら 2 枚を切れ目に沿って膨らませた後，図のように切れ目に沿って張り合わせてできる実曲面，すなわち，ドーナッツの表面（あるいは浮き輪の表面）と同相な実曲面である（図 5）．

より高次の曲線については，滑らかな曲線に限ってもその標準形は知られていない．滑らかな d 次複素射影曲線は種数 $g=(d-1)(d-2)/2$ の向きつけ可能な閉曲面，すなわち，$(d-1)(d-2)/2$ 人乗りの浮き輪の表面と同相であることが知られている（図 6）．

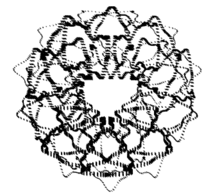
このように，滑らかな射影平面曲線の種数は，0, 1, 3, 6, ... のように，とびとびの値しかとらない．与えられた 2 以上の整数 g に対して，種数 g の滑らかな複素代数曲線は $5g-6$ 次元射影空間 $\mathbf{P}^{5g-6}$ の中に（方程式の係数である）パラメーターに関してよい形で振る舞うよう一斉に実現できること，代数多様体あるいは複素多様体としての同型類全体の集合（モジュライ）には再び代数多様体の構造が自然な形で入り，$3g-3$ 次元の代数多様体をなすことなどが知られている．

参考文献

1) 小木曽啓示『代数曲線論』，朝倉書店，2004.
2) 梶原健『代数曲線入門』，日本評論社，2004.
3) ハーツホーン（松下，高橋訳）『代数幾何学』，シュプリンガー・ジャパン，2005.
4) W. Fulton, *Algebraic Curves*, W.A. Benjamin INC, New York 1969.
5) F. Kirwan, *Complex Algebraic Curves*, Cambridge Unversity Press, 1992.

（おぎそ・けいじ，大阪大学大学院理学研究科）

双曲幾何と曲面



小島 定吉

1. はじめに

この稿は，双曲幾何と曲面というテーマを数学的に解説する前半２節と，万人が感じられるであろう双曲曲面の魅力を紹介する後半２節に分けた．それぞれ独立に読むことができ，双曲幾何に深入りせず４節以降だけを読むのも一興である．

2. 双曲幾何とは？

ユークリッド幾何には,「平面上に直線 L と L 上にない点 p が与えられたとき, p を通り L と交わらない直線がただ一つ存在する」という公理がある．長い間この公理が他の公理と独立かどうかを問う論争があり, その争いに否定的に決着をつけたのが1830 年前後のロバチェフスキー（Lobachevsky）とボーヤイ（Bolyai）の仕事である．そこから**非ユークリッド幾何**の一例として**双曲幾何**の歴史が始まった．

非ユークリッド幾何の発見は，当時の数学界に大きな契機をもたらし, 19 世紀後半に双曲幾何は, ベルトラミ（Beltrami), ポアンカレ（Poincaré), クライン（Klein）等によりいろいろな**モデル**が発見された．さらに 100 年近くを経て，20 世紀後半にはサーストン（Thurston）およびミルナー（Milnor）により現代的視点が導入され，今日では大変洗練された形で論じることが可能になっている[2,3,5]．

$n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ に

$$-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2$$

で定義される符号が $(1,n)$ の不定値計量を与え，**ローレンツ空間**と呼び $\mathbb{R}^{1,n}$ で表す．$\mathbb{R}^{n+1}$ の各点の接空間を $\mathbb{R}^{1,n}$ と同一視し，$\mathbb{R}^{n+1}$ を擬リーマン空間と見なす．このとき，ローレンツ計量を $\mathbb{R}^{n+1}$ の単葉双曲面

$$\mathbb{H}^n=\{-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=-1,\ x_0>0\}$$

の各点の接空間に制限すると正定値であることが分かり，$\mathbb{H}^n$ はリーマン多様体になる．さらに, $\mathbb{R}^{n+1}$ のローレンツ計量を保ち, 単葉成分 $\mathbb{H}^n$ を保つ線形変換は, $\mathbb{H}^n$ に等長変換として作用する．そのような変換からなる群をローレンツ群と呼び, $O^+(1,n)$ で表す．ローレンツ群の作用は推移的で，１点の固定群は n 次元分の回転対称性をもち，任意の点の接空間の任意の２次元部分空間に対して定義される断面曲率が一定の値をとる定曲率空間となる．曲率は計算すると -1．組 $(\mathbb{H}^n,O^+(1,n))$ はクラインの意味で幾何学で，双曲幾何の**双曲面モデル**と呼ばれている．双曲面モデルから，よく知られている双曲幾何の射影モデル，ディスクモデル，上半空間モデル等の各種モデルを導出することができる．詳しくは拙著[2)] を参照いただきたい．

２次元の場合はリーマン面の一意化定理により，また３次元の場合はペレルマンに幾何化予想解決により，2, 3 次元多様体はほとんどすべて双曲構造

をもつことが知られている．一方4次元以上では，断面曲率が一定という制約はたいへんきつく，例えば複素2次元複素双曲空間のフビニ・スタディー計量は断面曲率は負ではあるが一定でなく，-1 から $-1/4$ の間を動く．そのコンパクト商は断面曲率が一定の計量はもたないことも知られている．しかしながら，複素双曲空間のような一定ではなくても至るところ負の断面曲率をもつ空間は，多くの点で双曲幾何と共通の性質があり，負曲率幾何，あるいはやや混乱するが双曲幾何と呼ばれ，様々な研究がある．

ここで，平面双曲幾何とユークリッド幾何との対比を記しておきたい．ユークリッド幾何では3角形の内角の和は180度で一定になる．双曲幾何では0度以上180度未満になり，内角の和が一定にならず1次元の自由度が生じる．しかし双曲幾何では拡大縮小の相似変換がなく，その自由度が1次元減じられるので，3角形の合同類を決める自由度はいずれの幾何でも3である．

3. 曲面は何でも双曲幾何

向き付け可能な場合に話を限定すると，曲面のトポロジーはオイラー標数で決まる．すなわち，2つの曲面のトポロジーが等しいこととそれらの**オイラー標数**が等しいことは同値である．オイラー標数は，曲面を多角形で分割したとき，

$$\chi = \#\{\text{多角形}\} - \#\{\text{辺}\} + \#\{\text{頂点}\}$$

で決まる，大変簡単な整数である．オイラー標数から計算される量，

$$g = (2-\chi)/2$$

は**種数**と呼ばれ，曲面が空間内にうまく表示されれば穴の数である．そこで以降，種数が $g\,(\geq 0)$ の曲面を Σ_g で表すことする．Σ_g は位相同型類の代表元を記すトポロジカルな概念に対する記号である．

ガウス・ボンネの定理は種数 g が0か1か2以上によって曲面が許容する幾何を規定し，とくに g が2以上の曲面が双曲幾何と相性がよいことを示す．だからと言って双曲幾何と曲面の関連は種数2以上に限られるわけではなく，実はあらゆる曲面が複素解析を通して双曲幾何と深く関連している．とりあえず，複素構造は自然に向きを定義することを記憶に留めておこう．

3.1 球面の双曲幾何

種数が0の曲面 $\Sigma_0 \approx \mathbb{S}^2$ は球面と呼ばれている．**リーマン球** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は，球面とトポロジーが等しい複素多様体である．一方，一意化定理により球面上の複素構造は一意的で，リーマン球で実現されている構造に双正則である．しかし，その正則自己同型群 $\Omega(\hat{\mathbb{C}})$ は豊富で，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の一次分数変換からなる群 $PSL(2,\mathbb{C})$ に同型である．

リーマン球 $\hat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{H}^3$ の境界と見なすことができる．さらに，$\hat{\mathbb{C}}$ の正則自己同型は，$\mathbb{H}^3$ の向きを保つ自己等長写像に一意的に拡張し，また逆に，$\mathbb{H}^3$ 上の向きを保つ自己等長写像は境界 $\hat{\mathbb{C}}$ の正則自己同型を一意的に誘導する．したがって $\Omega(\hat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{Isom}_+\,\mathbb{H}^3 \cong SO^+(1,3) \cong PSL(2,\mathbb{C})$ という対応がある．すなわち，球面は複素構造を通すと3次元双曲幾何と密接に結びつく．このことを最初に指摘したのはマーデン（Marden）で，1974年にプリンストン大学と高等研究所の紀要である Annals of Mathematics 誌に掲載された論文にその理論が展開されている．1990年に彼が来日したとき，どんなタイミングでそのことに気がついたのかを尋ねたところ，「自然に考えれば至極当然」という返事で，肩意地をはらない姿に，なぜか日本人みたいだなと思ったのを記憶している．

3.2 トーラスの双曲幾何

種数が1の曲面 $\Sigma_1 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ はトーラスと呼ばれている．**複素トーラス** T とは，トーラスとトポロジーが等しい複素多様体のことである．一意化定理により複素トーラスには自然な相似構造が入る．マーキングと呼ばれるホモトピー同値写像 $\varphi : \Sigma_1 \to T$ を組にして，複素トーラスの双正則同値類の全体であるモジュライを考える．$H_1(\Sigma_1;\mathbb{Z})$ の生成元 m, l を交点数が1となるように指定し，m を複素数平面 $\mathbb{C}$ の原点から1に

向かうベクトルに対応させて相似構造を正規化すると，l は，虚部が正の $\omega \in \mathbb{C}$ を終点とするベクトルにうつる．したがって複素トーラスのマーク付きモジュライ空間 $\mathcal{T}_1$ は複素数平面の上半平面 $\mathbf{H}$ と同一視することができる．すなわち

$$\mathcal{T}_1 = \{\omega \in \mathbb{C}, ; \Im\omega > 0\} = \mathbf{H}$$

である．このモジュライ空間はトーラスの**タイヒミュラー空間**と呼ばれている．

上半平面 $\mathbf{H}$ は，2 次元双曲幾何の上半平面モデルの台空間であった．その向きを保つ等長変換からなる群は，複素関数論で良く知られているように $\mathbf{H}$ の正則自己同型群と一致していて，$\Omega(\mathbf{H}) \cong PSL(2,\mathbb{R}) \cong SO^+(1,2)$ である．

一方，トーラスの向きを保つ自己同相写像のホモトピー類のなす群 $\mathcal{M}_1$ は，**写像類群**と呼ばれるが，$H_1(\Sigma_1,\mathbb{Z})$ の交点数を保つ自己同型群と一致していて，マーキングを指定する m, l を基底にとれば $SL(2,\mathbb{Z})$ に同型である．さらに $\mathcal{M}_1$ は複素構造を引き戻すことにより $\mathcal{T}_1$ に作用するが，その核は $-I$ で表される超楕円的変換からなり，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1/\{\pm I\} &= SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\} \\ &\subset PSL(2,\mathbb{R}) \cong SO^+(1,2)\end{aligned}$$

という対応がある．すなわち写像類群はタイヒミュラー空間に双曲計量に関して等長的に作用し，タイヒミュラー空間を写像類群の作用で割った複素トーラスの双正則同値類からなるモジュライ空間は，

$$\mathbb{M}_1 = \mathcal{T}_1/\mathcal{M}_1 \cong \mathbf{H}/PSL(2,\mathbb{Z})$$

という，双曲幾何による大変ニートな表示が得られる．この表示は，数学を専攻した人であればどこかで一度は見ているのではないだろうか．

3.3 種数が 2 以上の曲面の双曲幾何

曲面上の複素構造と定曲率リーマン構造は，大変相性が良い．複素構造はリーマン構造ではないが，正則写像は角度を保つため，2 つの接ベクトルのなす角度という概念が定義できる．一意化定理は種数が 2 以上のリーマン面は角度データが一致する双曲構造を一意的にもつことを主張している．すなわち，種数 2 以上のリーマン面には，複素構造が提供する角度データが全く一致する双曲構造が一意的に存在するのである．したがって種数 2 以上の曲面は，種数 1 以下の曲面に比べ，より直接的に双曲幾何と相性がよい．

任意の向き付け可能な**双曲曲面**は $SO^+(1,2)$ の離散部分群 Γ により $\mathbb{H}^2/\Gamma$ として表すことができる．この離散部分群は，複素関数論でおなじみの $SO^+(1,2) \cong PSL(2,\mathbb{R}) \cong PU(1,1)$ という同型を通して大変ポピュラーであり，リー群の離散部分群の観点からフックス群論として膨大な研究の蓄積がある．

一言加えると，双曲曲面は双曲多角形を貼り合わせて得られるという組合せ的視点も特徴的で，タイル貼りとの関連も含め，深い研究が続いている．構成要素のアトムは双曲 3 角形で，その内角の和 I は 180 度未満，さらにその面積は $\pi - I$ であることを考慮すると，

$$\text{面積} = -2\pi\chi$$

というガウス・ボンネの公式が簡単に導ける．

3.4 モジュライの双曲幾何

種数 2 以上の曲面の双曲性は，モジュライにも見られる．トーラスのタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_1$ が上半平面 $\mathbf{H}$ と同一視でき，しかも写像類群 $\mathcal{M}_1$ が $\mathcal{T}_1$ に双曲計量に関して等長的に作用することは前に記した．種数 2 以上の曲面 Σ_g に対しても，マーキングを指定することによりタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ およびモジュライ空間 $\mathbb{M}_g = \mathcal{T}_g/\mathcal{M}_g$ が定義できる．ここで $\mathcal{M}_g$ は Σ_g の自己同型写像のホモトピー類からなる写像類群である．この群は大変複雑で，本特集でもいくつかの記事がその面白さを語っているはずである．

$\mathcal{T}_g$ 上には，複素構造の違いを測る**歪度**（dilatation）を用いて**タイヒミュラー距離** d_{T} を定義することができる．すなわち，R, R' を種数 $g\,(\geq 2)$ のリーマン面としたとき，

$$d_{\mathrm{T}}(R,R') = \inf_{f:R\to R'} \sup_{x\in R} \log K_f(x)$$

である．ここで $f : R \to R'$ は擬等角同相写像，

$K_f(x)\,(\geq 1)$ は f のほとんどすべての点 $x \in R$ で存在する微分 df_x の最大最小固有値の比である．d_{T} は距離になるが，リーマン面の摂動に関する微分可能性が保証できず，$\mathcal{T}_g$ 上のリーマン計量にはならない．しかし，小林昭七先生が定義された双曲計量になっていて，$\mathcal{T}_g$ が双曲っぽい証の一つとなる．写像類群の作用はタイヒミュラー距離に関して等長的である．

タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_g$ にはもう一つ，写像類群の作用が等長的となるヴェイユ（Weil）とピーターソン（Petersson）による由緒正しい距離がある．結論を先に述べると，**ヴェイユ・ピーターソン計量** d_{WT} は $\mathcal{T}_g$ 上のリーマン計量で，負曲率だが完備ではなく，また漸近的にゼロに近づく経路がある．以下のパラグラフはかなり専門的になるが，スキップしても4節以降を読むのには影響ない．

ヴェイユ・ピーターソン計量の定義には準備がいる．まず，リーマン面 R を固定し，その正則余接バンドル $T^{1,0}R$ を2つテンソルした複素直線バンドル $(T^{1,0}R)^{\otimes 2}$ を考える．その正則切断を正則2次微分と呼ぶ．R 上の正則2次微分の空間 $Q(R)$ は，リーマン・ロッホの定理によりモジュライ空間と同じ次元のベクトル空間で，ベルトラミ係数 μ（複素構造の変形を微分同相により生じる無駄を込みに測る複素直線バンドル $(T^{1,0}R)^* \otimes (T^{0,1}R)$ への切断）とのカップリング

$$(\mu, q) = \int_R \mu q \tag{1}$$

により，$\mathcal{T}_g$ の R での余接空間と同一視することができる．したがって $\displaystyle\bigcup_{R \in \mathcal{T}_g} Q(R)$ は，$\mathcal{T}_g$ 上の余接バンドルと見なせる．$\rho(z)|dz|$ を R 上の複素構造に整合する双曲距離とすると，2つの正則2次微分 q, q' に対し，$\bar{q}q'/\rho^2$ は R 上の2次微分形式となる．このとき R 上の積分

$$\langle q, q' \rangle = \int_R \frac{\bar{q}q'}{\rho^2}$$

は $Q(R)$ 上のエルミート形式を定める．R を動かせば，$\mathcal{T}_g$ 上の余接バンドル上のエルミート計量が定まる．これを (1) の対応で正則接バンドルに移せば，$\mathcal{T}_g$ の正則接バンドル上のエルミート計量が定まる．ヴェイユ・ピーターソン計量は，その実部として定義されるリーマン計量である．

4. 双曲曲面はおしゃれ

話は180度変わるが，ポアンカレ予想の解決を記したNHKスペシャルの番組[8]のディレクターである春日真人氏により，番組取材記が出版された[1]．これを読んだファッションブランドISSEY MIYAKEのクリエイティブディレクター藤原大氏は，パリコレのテーマに数学をと考えつき春日さんにコンタクトを取った．そのつてでサーストンと手紙のやり取りをし，脈がありそうだということで，私にコンタクトがあった．2009年の8月6日に東工大で会い，そのとき数学が提供できるオブジェの一例として，ウィークス（Weeks）によるフライトシュミレータ，阿原・荒木による3次元フラクタルを刻印したクリスタル，および，かみさんが縫った**ペンタゴン**（図1）と名付けた種数4の双曲曲面のオブジェを紹介した．

コンピュータグラフィクスやクリスタルはいわばメカニックなオブジェで，面白い図形ではあるが藤原さんたちには堅すぎたようである．それに比べ，かみさんが縫ったペンタゴンは布製で，こねくり回すことができ親近感を持ってもらえたらしく，9月15日にペンタゴンをネタにISSEY MIYAKE



図1　ペンタゴン．

のアトリエでワークショップを行うという話に発展した．布の柔軟性はトポロジーを説明するのにも大変有効だった．その後ワークショップを開催するにあたり，ペンタゴンのパターン（型紙）などの材料の提供を求められた．そしてワークショップ１週間前になって突然，「あまりに不思議でいままで肝心なことを聞くのを忘れていましたが，あのオブジェは何なのでしょうか？」という，数学のオブジェが理屈抜きで人を感動させる力あることを実証する嬉しい問い合わせがあった．確かに私はそれまでペンタゴンは何かを説明していなかった．

ペンタゴンは，等辺５角形のモジュライで，頭の中で考える数学では双曲直角正５角形を 24 枚貼り合わせてできる，大変対称性の高い種数４の双曲曲面である．各頂点の周りには４つの直角５角形が貼り合うので，特異点のない双曲曲面となる．実際にオブジェとして作るときは，少し目をつぶってユークリッド正５角形を 24 枚貼り合わせる．ペンタゴンを触ってみれば，布なので，頂点のところの不自然な歪みはあまり気にならない．

ところで，ワークショップ後の ISSEY MIYAKE チームの動きは早く，わずか９日後，パリでのコレクション打合せの前の数日を割いて，サーストンに会いにニューヨーク州のイサカにあるコーネル大を訪れた．そこでは，リンゴの皮をむいたりシダの葉っぱを広げたりして曲率の概念を説明するサーストンと，みかんの皮を剥いて広げ平面上のパターンと立体的な形の間の結び付きを語る藤原さんは，大いに盛り上がったそうである．

ISSEY MIYAKE チームはその後パリのポアンカレ研究所を訪れ滋養を蓄え，さらに 10 月になってサーストンから彼の幾何化予想を特徴的に表現する８つの幾何のメタファー（比喩）を贈られ，方向性を確信したらしい．かねてから私が紹介していた明治大学の阿原一志さんにコンタクトし，阿原さんは昨年の 10 月後半から３日間，ISSEY MIYAKE チームの方々を相手に合計 15 時間のトポロジーのレクチャーを行った．阿原さんは自身の役割をコーチングと表現されたが，すばらしい

ネーミングである．数学のコーチングにサポートされたクリエイティブな作業で産まれた何かは，なぜか深みがある．

昨年9月のワークショップ以来2010年3月開催のパリコレ寸前まで，私個人はISSEY MIYAKEとはコンタクトがなかった．企画はボツになったかと思ったこともあったが，年が開けて2月になって，INSIDE NEWS No.6というショーでの配布物の校正刷りが届き，阿原さんが協力されていることを知った．パリコレのテーマは発表までは関係者には守秘事項で，連絡がないのも至極当然．

3月5日にパリのルーブル美術館の地下のホールで発表されたショーは，トポロジーそのものの絡み目のデザインや，いかにもトポロジーらしい着方が分からない服や，ペンタゴンもどきのストールなど満載で，カラフルで，従来の「幾何学模様」のような数学と服飾との接点とは一線を画す大変ユニークなものだったようである．数学者の視点で眺めると，大掛かりな舞台装置を含め，至る所に双曲幾何のエッセンスが現れていた．ショーの評判は，発表直後に多くの新聞やモード誌で取り上げられたことからも，大変高かったと想像される，要するに，双曲曲面はおしゃれなのだ．

5. ペンタゴンの不思議は普遍的

ISSEY MIYAKEを動かしたかもしれないペンタゴンの不思議さは，服飾業界以外でも受け入れてもらえたことを記したい．

球面とトーラスは，あまりにポピュラーな曲面で，至る所に登場する．例えば，トーラスとコーヒカップの表面はトポロジーが等しいとか，球面とトーラスはトポロジーが異なる，とかである．メビウスの帯やクラインの壷になると神秘性が増し，ウェブ上ではなかなか美しいグラフィックスを見ることができる．しかし，これらは双曲幾何ではマイナーな曲面である．種数が2以上の双曲幾何でメジャーな曲面が主役になる場面は意外に少ない．おそらく，トーラスをいくつかくっつけた程度の貧弱なイメージしかなく，双曲曲面がいかに優雅で美しいかに接する機会がないのだろう．確かに，バークレイの数理科学研究所の庭に陳列されているクラインの4次曲線の彫刻や，私のかみさんが縫ったペンタゴンは，数学関係者は喜々としてその神秘に触れて眺めているが，一般の聴衆（例えば高校生）にその背景を説明するのは，不可能ではないが時間がかかる．

4月半ばに東工大理学部特別講演会で「パリコレでポアンカレ予想を」と題する講演を行う機会に恵まれた[4]．聴衆は東工大理学部の教員・学生と，講演会をサポートしてくれる事務の方が中心である．理学部の講演会としてはお粗末ながら学術的解説をほとんどはしょり，講演後の質疑応答で座長で物理学者の岡眞理学部長から「ペンタゴンは何か」と迫られたが，のらりくらりとはぐらかしてしまった（岡先生，ごめんなさい）．だが，ペンタゴンはモテモテだった．双曲曲面は触ってこそ楽しい．

その後，日経サイエンスから話があり，物理出身の脳科学者である茂木健一郎氏と対談した．茂木さんはペンタゴンを実に楽しそうにこねくり回していた．その様子は対談記事として日経サイエンスの8月号に掲載された[7]．対談記事をまとめる過程で，古田彩さんに大変助けられた．日本にはサイエンティフィックライターは居ないと言う話はもうなしである．

さらにもう一つ，同僚の渡辺治先生の紹介で不条理劇のポストトークという大変貴重な機会に恵まれた．サミュエル・ベケットという著名な演劇作家の「芝居」という本に，早稲田大学の岡室美奈子先生＋ベケットゼミが新訳をつけ，6月初めに鴎座という劇団により「プレイ」と題し，荻窪の小さな（といっても尤に100人は入る）スペースで公演が行われた[6]．それぞれの壷に入った男1人女2人が，不倫の状態を20分間，体を振るわせながらものすごい勢いで喋り，もう1ラウンド繰り返して合計40分で終わると言う劇で，静的な舞台を想像していた私は，ただただ圧倒されるばかりであった．

ポストトークとなり，岡室さんがベケットの半

端でない数学癖を披露して下さり，不条理は二律背反の両者がいつのまにか変わっている，メビウスの帯やクラインの壷の不思議に共通点がある，「プレイ」は内外がある壷が主役，という話でお膳立てが整い，出だしはスムースだった．今にして思うと，東工大の理学部講演会と同じく数学の詳細をカットすることが功を奏したのか，とりあえずペンタゴンを触ってもらうことにしたら，トーク後に参加一女学生から「私でもペンタゴンを作れますか？ 裁縫は得意です」という思いもよらぬ質問を受けた．そして今回の「プレイ」の演出を担当した川口智子さんのブログに「視覚的なイメージっていうのは結構強烈なもんで，昨日は何かをこねくり回したいモードにスイッチが，久々に深夜の工作をしてしまいました」という感想が記されていたのは嬉しかった．確かに，ペンタゴンはこねくり回しても形が変わらないのは大変不思議であり，それは「プレイ」のストーリーが繰り返されることに通じる．この稿の読者には是非いつか，ペンタゴンを触っていただきたいと思う．

参考文献

1) 春日真人，『100 年の難問はなぜ解けたのか 天才数学者の光と影』，NHK 出版 (2008).
2) 小島定吉，『多角形の現代幾何学 増補版』，牧野書店 (1999).
3) 小島定吉，『3 次元の幾何学』，朝倉書店 (2002).
4) 小島定吉，『パリコレでポアンカレ予想を』，東工大理学特別講演会 (2010), http://www.sci.titech.ac.jp/top/rigakutokubetukouen220414.pdf
5) 深谷賢治，『双曲幾何』，岩波書店 (2004).
6) ベケット・カフェ vol.3 プレイ (2010), http://beckettcafe08.hp.infoseek.co.jp/
7) 茂木健一郎，「日経サイエンス」8 月号 (2010).
8) NHK スペシャル「100 年の難問はなぜ解けたのか〜天才数学者　失踪の謎〜」(2007), http://www.nhk.or.jp/special/onair/071022.html

（こじま・さだよし，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

二木昭人

曲面についての本，および来し方の回想

曲面について初めて本で学んだのは『トポロジー』（田村一郎著，岩波書店）ではなかったかと思う．この本は単体分割（または三角形分割）された多様体のホモロジー論が扱われているが，一つの応用として向き付け可能閉曲面および向き付け不可能閉曲面の分類が書かれている．偶数個の辺からなる境界で囲われた領域から，辺を貼り合わる仕方の違いによりいろいろな曲面が得られることを初めて学んだときは大変面白いと思った．向き付け可能閉曲面の場合，穴の個数（種数と呼ばれる）g で分類される．球面なら $g=0$ であり，ドーナツの表面（トーラスと呼ばれる）なら $g=1$ である．さらに2人乗り浮き袋なら $g=2$ である．驚くべきことは，どのような3角形分割をしても“頂点の個数 − 辺の個数 + 面の個数”は一定の数 $2-2g$ になることである．この数はオイラー数と呼ばれる．結局，曲面の伸縮を無視した形のみから決まるということであり，このようなとき同じ位相であるというので，位相不変量と呼ばれる．

向き付け可能閉曲面に対するガウス・ボンネの定理はガウス曲率という曲面上の関数を曲面上で積分した量がオイラー数と一致するということを主張する．これを初めて学んだ本は『Charactersitic classes』（J. Milnor 著，Princeton Univ. Press）であったと思う．微分幾何の本として初めてガウス・ボンネの定理をきちんと書いた本として読んだのは『曲線と曲面の微分幾何』（小林昭七著，裳華房）である．ガウス曲率とを曲面上で積分するというのは，一つのド・ラームコホモロジー類を基本ホモロジー類で値を取ると理解され，このド・ラームコホモロジー類がオイラー類などの特性類の理論に拡張する．また，オイラー数はド・ラーム複体の解析的指数であるので，アティヤ・シンガーの指数定理の原型ともみなされる．この意味で，ガウス・ボンネの定理は現代数学のいろいろな定理の原型になっていると考えられる．

さて，向き付け可能閉曲面を M，その上のリーマン計量を g とすると，曲率 κ と自然な測度 dV が決まる．また M の3角形分割 $\varDelta$ を一つ取り，そのオイラー数“頂点の個数 − 辺の個数 + 面の個数”を $\chi(M,\varDelta)$ とする．このとき，ガウス・ボンネの定理は

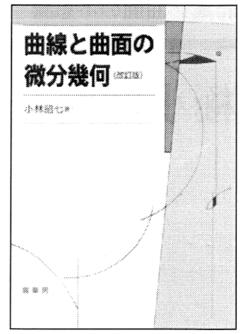
$$\frac{1}{2\pi}\int_M \kappa\, dV = \chi(M,\varDelta)$$

により与えられる．この式の左辺においてリーマン計量の取り方は任意であり（例えば3次元ユークリッド空間内で曲面を伸ばしたりゆがめたりしてよい），右辺において3角形分割の取り方は任意である．この両辺が等しいということは右辺のオイラー数 $\chi(M,\varDelta)$ が3角形分割 $\varDelta$ によらず一定であることを言い，また，左辺のド・ラーム類 $[\kappa\, dV/2\pi]$ がリーマン計量 g の取り方によらず一定であることを言っている．このド・ラーム類 $[\kappa\, dV/2\pi]$ が特性類としてのオイラー類であり，M を g の共形類から決まる1次元複素多様体とみなしたときの第1チャーン類である．

次に高次元の多様体を研究するためにその多様体内の曲面を使うことがある．リーマン幾何では測地線を使うのと同様である．その典型例は代数幾何でハーツホーン予想と呼ばれ，微分幾何でフランケル予想と呼ばれた問題である．この問題は1979年頃に代数幾何のほうは森重文により，微分幾何のほうは Siu–Yau により解決された．コンパクト複素多様体は適当な仮定のもとに複素射影空間に双正則になるという予想であるが，小林昭七–落合卓四郎により，問題は正則な $\mathbb{CP}^1$ の存在に帰着されることが知られていた．このことを証明するための一つの手段として調和写像を使う方法がある．実2次元多様体からの調和写像は一般にはバブル・オフという現象が起こることが Sacks–Uhlenbeck により調べられていた．一方，同時期にゲージ理論でもバブル・オフという現象があり，これも Uhlenbeck により調べられていた．ゲージ理論では解のモデュライ空間を使うことが4次元微分トポロジーの研究に有効であった．このアイデアと同様の手法がシンプレクティック幾何の J-正則曲線を用いる方法である．この方法は近年のミラー対称性の研究の進展などのため，ますます重要になっている．

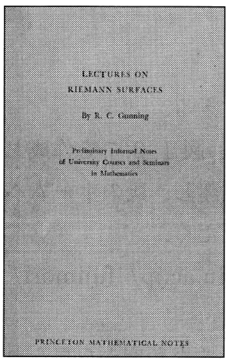
（ふたき・あきと，東京工業大学大学院理工学研究科）

曲線と曲面の微分幾何



小林昭七著，A5 判，216 頁，本体 2600 円，裳華房，1995 年

この本は 2 年生の幾何学概論という半年の講義で教科書に指定している．2，3 年に一回はこの講義を担当するのでよく手にする本である．第 1 章の平面曲線と空間曲線は 1 回の講義で済ませ，あとの 12 回くらいでガウス・ボンネの定理を証明する．講義では 2 変数の微分形式，Stokes の定理の証明に多くの時間を使う．測地線を丁寧にやる時間はないし，証明には必要ないので概念だけを紹介している．

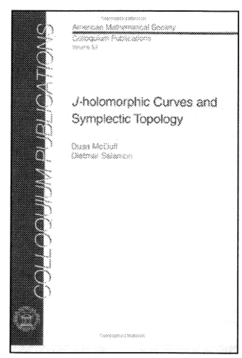


Lectures on Riemann surfaces

R.C.Gunning 著，254pp, Princeton University Press, 1966

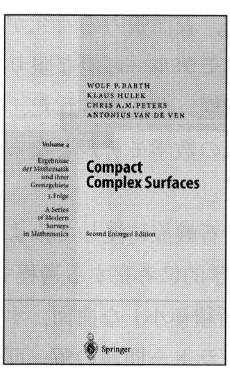
この本は 4 年生の卒業研究のテキストとして使ったことがある．この本を指定したらその学年で 1 番の秀才が来てくれて嬉しかったので，そのあとも何度かこのテキストを指定したが，その後はこの本に惹かれて私の研究室に来た人はいない．この本は一変数の複素関数論，または 1 次元複素多様体の本というべきものであるが，多変数ないし高次元の基本的な勉強もできるように配慮されている．

J-holomorphic curves and symplectic topology



D. McDuff and D. Salamon 著，669pp, Amer. Math. Soc., 2004

この本は 669 頁もあって，実は通読はしていない．しかし近年ますます重要さが増していると思うので，あげることにした．同じ著者による『J-holomorphic curves and quantum cohomology』という 209 頁の本もあり，こちらも良い本である．209 頁の本のほうは 1994 年に，669 頁のほうは 2004 年に発刊されている．J-holomorphic curve というのはシンプレクティック多様体の正則曲線である．

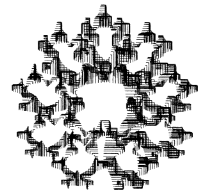


Compact complex surfaces

W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven 著，Second edition. xii+436 pp, Springer-Verlag, Berlin, 2004

上記の 3 つの本は実 2 次元の曲面を扱っているが，複素 2 次元という意味の複素曲面の本をあげるとすればこの本であろう．First edition は Barth, Peters, Van de Ven の 3 人の著者で筆者が学生の頃発刊された．何年かかっても少しずつでも読んでいつか全部読みたいと思っていたが，中年を通り過ぎようという年になってもまだ読んでいないし，本を開いてみることも最近は少なくなった．

極小曲面と変分問題



宮岡 礼子

1. 序

極小曲面を用いると，非コンパクトな完備リーマン面をユークリッド空間に実現して目で見ることができる．これは極小曲面論の一つの大きな魅力である．

http://3d-xplormath.org/j/index_ja.html
にアクセスして，3D-XplorMath-J というフリーソフトをダウンロードしよう（Mac OS 用，Windows 用）．ツールバーのギャラリーから曲面，極小曲面とたどり，どれでも好きなものを開いてみる．例えば，懸垂面–螺旋面というのを開くと，螺旋面が現れる．これは螺旋階段を滑らかにした極小曲面で，ドラッグして好きな角度から見ることができる．次にツールバーのアニメーションから周期的アニメーション作成をクリックしてみよう．曲面の形がなめらかに変化して，懸垂面に変わる（図 1）．実はあらゆる極小曲面はこのような変形をもち，現れる曲面は随伴曲面族と呼ばれる．変形のパラメータは可積分系理論に現れるスペクトルパラメータの元祖とも言える．

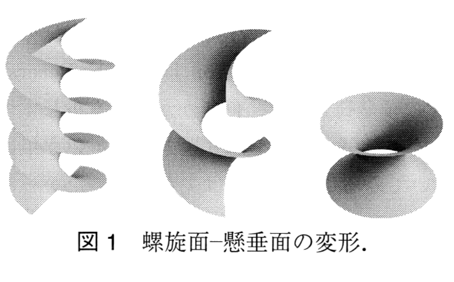


図 1　螺旋面–懸垂面の変形．

この記事を書くにあたり，図 1, 2, 7 を作成していただいた藤森祥一氏に感謝し，氏のホームページも参考にあげさせていただく．

http://www.fukuoka-edu.ac.jp/~fujimori/min_surf/index.html
Jawa View で画像をいろいろな角度から見られるのでお試しを．

また，図 1, 2, 7 については内容の理解の助けになるよう，カラーのものを**裏表紙裏**に掲載した．あわせて参照していただきたい．

さて，本論に入るが，ここではワイエルシュトラス表現などには触れず，変分問題の観点から話を進める．

2. 極小曲面の由来と変分問題

19 世紀の前半，ベルギーの物理学者でストロボスコープなどの発明家プラトー（J. Plateau）により，石鹸膜とシャボン玉，表面張力の研究が行われ，石鹸膜の正しい数学モデル—可能な限り小さな面積で膜が張られる状態—が認識された．この研究は多くの物理の問題の数学モデルとなっている．

針金を曲げて枠を作り，石鹸液に浸してみよう（図 2）．できる石鹸膜を数学的に考察する過程で，「面積最小」より一般な「面積極小」な曲面，すなわち極小曲面が現れる．プラトー問題の解＝可能

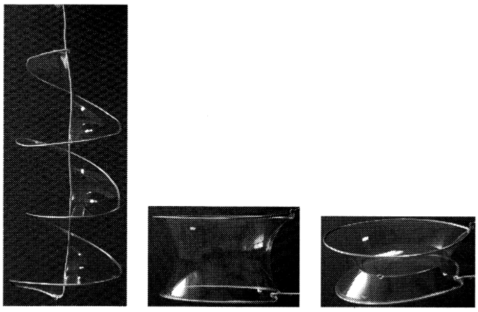


図2　石鹸膜でできる常螺旋面，懸垂面，特異点のある石鹸膜．

な限り小さな面積の曲面はその特別なもので，枠の形状によっては特異点（とんがった点）や自己交叉をもつ複雑な曲面が現れる．3次元ユークリッド空間 E^3 内の（病的でない）単純閉曲線からなる枠を考え，その枠をはる円板と同相な曲面のみを考えると，プラトー問題は特異点のない解をもつことが知られている．ここではまず極小曲面を変分問題の解として特徴付けるために少し一般的な変分問題を述べ，第1変分公式とオイラー・ラグランジュ方程式を導こう．

3. 変分問題とオイラー・ラグランジュ方程式

簡単のため，D を平面内の開円板として，写像の空間 $\mathcal{F}=\{\boldsymbol{x}:D\to E^3 \mid 2$ 階連続微分可能 $\}$ の上で定義された汎関数

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\int_D F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v)dudv \tag{1}$$

を考える*1)．ここに u,v は D の座標で，F は $\boldsymbol{x}$ とその微分 $\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}=\boldsymbol{x}_u$, $\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}=\boldsymbol{x}_v$ の成分の可微分関数である．変数がベクトルであるから，F は実際はその成分の関数，すなわち9変数の関数である．例えば E^3 の座標を (x^1,x^2,x^3) として，$\boldsymbol{x}_u=(x_u^1,x_u^2,x_u^3)$ と書くと，

$$F_{\boldsymbol{x}_u}=\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{x}_u}=\left(\frac{\partial F}{\partial x_u^1},\frac{\partial F}{\partial x_u^2},\frac{\partial F}{\partial x_u^3}\right)$$

*1)　以下の議論は無限次元空間 $\mathcal{F}$ 上の議論なので，位相や可微分性の問題などを厳密に論じることはたやすくないが，あとに用いる具体的計算には問題が生じないので読み流してほしい．

だから，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v)=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{x}_u|^2+|\boldsymbol{x}_v|^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\{(x_u^i)^2+(x_v^i)^2)\}$ のときは，

$$F_{\boldsymbol{x}}=0,\quad F_{\boldsymbol{x}_u}=\boldsymbol{x}_u,\quad F_{\boldsymbol{x}_v}=\boldsymbol{x}_v \tag{2}$$

となる．D の境界を ∂D と書き，枠 $\gamma:\partial D\to E^3$ を固定して，$\mathcal{C}_\gamma=\{\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}\mid \boldsymbol{x}|_{\partial D}=\gamma,\Phi(\boldsymbol{x})<\infty\}$ とおく．$\boldsymbol{x}$ の変分とは，枠を固定した写像族 $\boldsymbol{x}_t\in\mathcal{C}_\gamma$, $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}$ のことである．$\Phi(t)=\Phi(\boldsymbol{x}_t)$ とおくとき，第1変分公式は，E^3 の内積を $\cdot$ で表すと，

$$\begin{aligned}0&=\frac{d\Phi(t)}{dt}\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\int_D F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v)dudv\\&=\int_D\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v)dudv\\&=\int_D\left\{F_{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}+F_{\boldsymbol{x}_u}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_u}{dt}+F_{\boldsymbol{x}_v}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}_v}{dt}\right\}dudv\end{aligned} \tag{3}$$

となる．この2項目を $\frac{d\boldsymbol{x}_u}{dt}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ と書き直すと，

$$\int_D\frac{\partial}{\partial u}\left(F_{\boldsymbol{x}_u}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)dudv-\int_D\frac{\partial}{\partial u}F_{\boldsymbol{x}_u}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}dudv$$

だから，第1項は枠が固定されているならば

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big|_{\partial D}=0 \tag{4}$$

なので消える．(3) の第3項にも同じことをすれば，

$$\begin{aligned}0&=\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{t=0}\\&=\int_D\left(F_{\boldsymbol{x}}-\frac{\partial}{\partial u}F_{\boldsymbol{x}_u}-\frac{\partial}{\partial v}F_{\boldsymbol{x}_v}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}dudv\\&=\int_D\delta F\cdot V\,dudv\end{aligned} \tag{5}$$

となる．ただし，$\delta F=F_{\boldsymbol{x}}-\frac{\partial}{\partial u}F_{\boldsymbol{x}_u}-\frac{\partial}{\partial v}F_{\boldsymbol{x}_v}$, $V=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ とおいた．オイラー・ラグランジュ方程式は，(4) をみたす V の任意性から，

$$\delta F=0 \tag{6}$$

となる．これは $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v$ から決まる任意の汎関数 $\Phi(\boldsymbol{x})$，例えば，曲面の面積，写像のエネルギーなどに適用することができる一般公式である．

定義 3.1　写像 $\boldsymbol{x}: D \to E^3$ に対して

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int_D \{|\boldsymbol{x}_u|^2 + |\boldsymbol{x}_v|^2\} du dv$$

を**ディリクレ積分**，または写像 $\boldsymbol{x}$ の**エネルギー汎関数**と言う．

このとき，(2) より $\delta F = -(\boldsymbol{x}_{uu}+\boldsymbol{x}_{vv}) = -\triangle \boldsymbol{x}$ だから，(6) は $\triangle \boldsymbol{x} = 0$ となり，$\boldsymbol{x}$ の各成分は調和関数であることがわかる．$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ を**ラプラシアン**と言う．

定義 3.2　与えられた境界値に対して，エネルギー汎関数の極値を与える写像を**調和写像**と言う．

4. 第 1 基本量と等温座標

C^2 写像 $\boldsymbol{x}: D \ni (u,v) \mapsto \boldsymbol{x}(u,v) \in E^3$ は，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}_u$ と $\boldsymbol{x}_v$ が一次独立であるとき，E^3 の曲面（片）を定める．(u,v) を曲面の（局所）座標と言う．$g_{11} = |\boldsymbol{x}_u|^2, g_{12} = \boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v = g_{21}, g_{22} = |\boldsymbol{x}_v|^2$ を曲面の**第 1 基本量**，$u = u^1$, $v = u^2$ とおいて，$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$ を曲面の**リーマン計量**と言う．E^3 の外積ベクトルを $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ で表すとき $|\boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v| = \sqrt{\det(g_{ij})}$ は $\boldsymbol{x}_u$ と $\boldsymbol{x}_v$ ではられる平行四辺形の面積である．

E を (s,t) 平面上の領域とするとき，写像 $\phi: E \ni (s,t) \mapsto (u,v) \in D$ が微分同相ならば $\boldsymbol{x} \circ \phi: E \to E^3$ は $\boldsymbol{x}(u,v)$ を新しい座標 (s,t) で表したものと思えて，その像は変わらない（図 3）．

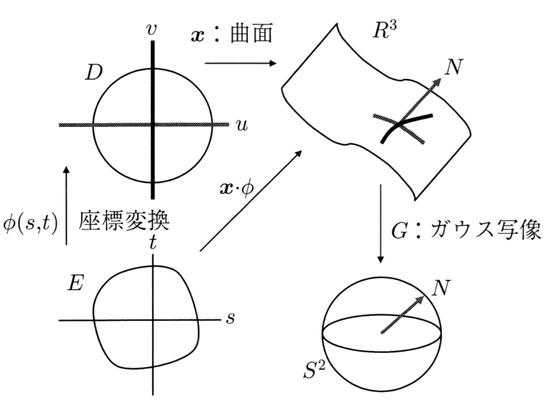


図 3　座標変換とガウス写像．

ϕ を曲面の座標変換と言う．

定理 4.1　向きづけられた C^2 級曲面（より一般には C^2 級 2 次元リーマン多様体）には局所座標系 (u,v) で $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$ をみたすもの，すなわち**等温座標**が存在する（図 4）．

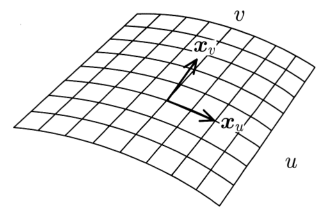


図 4　等温座標：座標曲線が直交し $|\boldsymbol{x}_u| = |\boldsymbol{x}_v|$．

等温座標では計量は $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$ と表される．等温座標の存在は，**複素構造**の存在と同値である．複素構造の入った 2 次元多様体を**リーマン面**と言う．存在証明は一般には面倒であるが，極小曲面に限っては比較的容易である．2 つの等温座標の間の座標変換は正則関数で与えられる．

5. 第 2 基本量と極小曲面

$u = u^1$, $v = u^2$ とおいて，$\boldsymbol{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_i \partial u_j}$ と書くとき，曲面の単位法ベクトル N に対し，**第 2 基本量**と**平均曲率ベクトル**をそれぞれ

$$h_{ij} = \boldsymbol{x}_{ij} \cdot N, (i,j = 1,2),$$
$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} (h_{ij} g^{ij}))N \tag{7}$$

で定義する．ここに (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列である．**平均曲率** H は 2×2 行列 $(\sum_j h_{ij} g^{jk})$ の固有値の平均で定義され，$\boldsymbol{H}$ も H も座標のとり方によらないことが変換則からわかる．

定義 5.1　$\boldsymbol{H} \equiv 0$ をみたす曲面を**極小曲面**と言う．

補題 5.1　等温座標 (u,v) に関しては次が成り立つ．

$$\triangle \boldsymbol{x} = 2\lambda^2 \boldsymbol{H}, \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}. \tag{8}$$

つまり極小曲面の座標関数は等温座標に関する調和関数である．

証明：まず $\triangle \boldsymbol{x}$ は法ベクトルである．実際，$|\boldsymbol{x}_u| = \lambda$ として

$$\begin{aligned}\triangle \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}_u &= \boldsymbol{x}_{uu} \cdot \boldsymbol{x}_u + \boldsymbol{x}_{vv} \cdot \boldsymbol{x}_u \\ &= \frac{1}{2}(\lambda)^2_u - \boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_{uv} \\ &= \frac{1}{2}(\lambda)^2_u - \frac{1}{2}(\lambda)^2_u = 0,\end{aligned}$$

同様に $\triangle \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}_v = 0$ より $\triangle \boldsymbol{x}$ は法ベクトルである．$\triangle \boldsymbol{x} \cdot N = h_{11} + h_{22} = 2\lambda^2 H$ だから (8) を得る． □

注意 5.1　ここで誤解してはいけないことがある．調和関数を 3 個並べても，極小曲面は得られない．極小曲面であるためには (u, v) が等温座標，つまり，$|\boldsymbol{x}_u| = |\boldsymbol{x}_v|$, $\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v = 0$ をみたさねばならないからである．このように極小曲面論には調和関数論でも正則曲線論でもない難しさがある．

境界のないコンパクトな極小曲面が存在しないことは，座標関数の調和性 (8) と最大値の原理によりただちにわかる．したがって Köbe の一意化定理より，完備な極小曲面の普遍被覆は，円板か全平面である．最大値原理からもう一つわかることは，2 つの極小曲面が 1 点で接し，かつ一方が他方の片側にあるなら 2 つの曲面は一致するということである．

6. 面積汎関数の第 1 変分公式

定義 6.1　$|\boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v| dudv = \sqrt{\det(g_{ij})} dudv$ を dA と書き，**面積要素**と言う．曲面 $\boldsymbol{x} : D \to E^3$ の面積は

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \int_D |\boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v| dudv \qquad (9)$$

で与えられる．面積は座標のとり方によらないことが容易に確かめられる．

定理 6.1　∂D で消える変分ベクトル場 V をもつ変分 $\boldsymbol{x}(t)$ を考えると，その面積 $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}(t))$ の第 1 変分は次で与えられる（図 5）．

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t)\Big|_{t=0} = -2 \int_D \boldsymbol{H} \cdot V dA. \qquad (10)$$

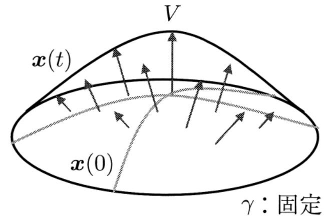


図 5　曲面の変分．

証明：面積も平均曲率も座標によらず，また δF は t によらないから，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(0)$ の等温座標を用いると，$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v) = \sqrt{|\boldsymbol{x}_u|^2 |\boldsymbol{x}_v|^2 - (\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v)^2} = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{x}_u|^2 + |\boldsymbol{x}_v|^2)$ で，(8) と (2) より，$\delta F = -\triangle \boldsymbol{x} = -2\lambda^2 \boldsymbol{H}$．他方，$dA = \lambda^2 dudv$ であるから (5) より (10) を得る． □

定義 6.2　直交座標 u, v に対して，写像 $\boldsymbol{x} : D \to E^3$ が $|\boldsymbol{x}_u| = |\boldsymbol{x}_v|$, $\langle \boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v \rangle = 0$ をみたすとき，$\boldsymbol{x}$ は**弱共形的**であると言われる．さらに $|\boldsymbol{x}_u| > 0$ であるとき，**共形的**であると言う．共形写像 $\boldsymbol{x} : D \to E^3$ は曲面を定め，(u, v) はその等温座標となる．

系 6.1　次は同値：(1) $x : D \to E^3$ は極小曲面．(2) $x : D \to E^3$ は境界を固定したとき面積の極値を与える曲面．(3) $x : D \to E^3$ は共形調和写像．

注意 6.1　$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) \geq \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ は容易に導ける．等号は (u, v) が等温座標のときに限る．$\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える曲面 $\boldsymbol{x}$ の等温座標をとれば，この $\boldsymbol{x}(u, v)$ が $\mathcal{E}(\boldsymbol{x})$ の最小値も与える．プラトー問題を解くときにはエネルギー汎関数を最小にする写像の存在を言う．$\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ の臨界点は領域の微分同相写像（座標変換）Diff(D) の分，退化するが，$\mathcal{E}(\boldsymbol{x})$ は，$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) \geq \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ により，通常の座標変換ではエネルギー値が上がり，臨界点での退化性は $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ の退化性より遥かに小さい．臨界点が退化しない関数（Morse 関数）は重要であり，測地線論でエネルギー汎関数が使われる理由も同じである．

7. 面積汎関数の第２変分公式と安定性

極小曲面は面積の極値を与えるが，極大か極小か，さらには最小性や安定性は第２変分を調べなければわからない．面積汎関数の第２変分を計算するため，まず (10) はどの曲面に対しても成り立つから，曲面族 $\boldsymbol{x}_t$ に対しては各 t で成り立つ．$t=0$ で極小のとき，右辺の $\boldsymbol{H}=HN$ を $t=0$ で微分すると，$H_tN\cdot V$ の部分だけが残る．結果として第１，第２変分とも，変分ベクトル場 V の法方向だけによることがわかる．そこで局所座標近傍に含まれる領域 D 上の境界で消える可微分関数 $\phi(u,v)$ に対して

$$\boldsymbol{x}(t,u,v)=\boldsymbol{x}(u,v)+t\phi(u,v)N, \quad V=\phi(u,v)N$$

で与えられる変分を考える．ここで，(u,v) を曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(0)$ の等温座標として，$dA=\lambda^2dudv$ とおくが，$\boldsymbol{x}(t)$ については等温とは限らないから，

$$\begin{aligned}&dA(t)\\&=\sqrt{|\boldsymbol{x}_u(t)|^2|\boldsymbol{x}_v(t)|^2-(\boldsymbol{x}_u(t)\cdot\boldsymbol{x}_v(t))^2}dudv\\&=F(t)dudv\end{aligned}$$

であることに注意する．$F^2(t)$ を t について展開して $\lambda^4(1+2tS+t^2T)+[t^3]$ とおくと，$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$ より

$$F(t)=\lambda^2\left(1+St+\frac{t^2}{2}(T-S)\right)+[t^3]$$

であるが，極小なら $S=0$ だから，$\left.\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}(t)\right|_{t=0}=\int_D TdA$ となり，$F(t)^2$ の展開の t^2 の係数を計算すればよいことになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)_u&=\boldsymbol{x}_u+t(\phi_uN+\phi N_u),\\\boldsymbol{x}(t)_v&=\boldsymbol{x}_v+t(\phi_vN+\phi N_v)\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}_u(t)|^2&=\lambda^2-2t\phi h_{11}+t^2(\phi_u^2+\phi^2|N_u|^2)\\|\boldsymbol{x}_v(t)|^2&=\lambda^2-2t\phi h_{22}+t^2(\phi_v^2+\phi^2|N_v|^2)\\\boldsymbol{x}_u(t)\cdot\boldsymbol{x}_v(t)&=-2t\phi h_{12}\\&\qquad+t^2(\phi_u\phi_v+\phi^2\langle N_u,N_v\rangle)\end{aligned}$$

である．ここに，第２基本量の定義と $|N|^2=1$ から

$$\begin{aligned}N_u&=-\frac{1}{\lambda^2}(h_{11}\boldsymbol{x}_u+h_{12}\boldsymbol{x}_v),\\N_v&=-\frac{1}{\lambda^2}(h_{21}\boldsymbol{x}_u+h_{22}\boldsymbol{x}_v)\end{aligned}$$

を用いた．さらに第２基本形式 $A=(h_{ij})$ の長さ $|A|^2=\frac{1}{\lambda^4}(h_{11}^2+h_{22}^2+2h_{12}^2)$ を用いて

$$\begin{aligned}|N_u|^2+|N_v|^2&=\frac{1}{\lambda^2}(h_{11}^2+h_{22}^2+2h_{12}^2)=|A|^2\lambda^2\\&=-\frac{2}{\lambda^2}(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)\end{aligned}$$

を得る．$h_{11}+h_{22}=0$ も用いた．勾配ベクトル $\nabla\phi=\frac{1}{\lambda^2}(\phi_u\boldsymbol{x}_u+\phi_v\boldsymbol{x}_v)$ を用いて $F(t)^2$ の t^2 の係数を表すことにより，次を得る．

定理 7.1　極小曲面片 $\boldsymbol{x}:D\to E^3$ の境界を固定する変分 $V=\phi N$ に関する面積の第２変分は，次で与えられる．

$$\begin{aligned}&\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}A(t)\\&=\int_D(|\nabla\phi|^2-\phi^2|A|^2)dA \qquad (11)\\&=-\int_D\phi J\phi dA, \quad J\phi=\triangle_M\phi+|A|^2\phi. \qquad (12)\end{aligned}$$

ここに，$\triangle_M=\frac{1}{\lambda^2}\triangle$ は E^3 の極小曲面 M のラプラス作用素の等温座標による局所表示で，上のような変分に対して，$\triangle_M\phi^2=2(\phi\triangle_M\phi+|\nabla\phi|^2)$ の左辺の積分は発散公式と (4) により消えるので (11) から (12) を得る．J を M のヤコビ作用素と言う．

定義 7.1　有界領域の外で消えるいかなる変分に対しても第２変分が非負となる極小曲面を**安定極小曲面**と言う．

石鹸膜は枠をはる曲面の中で面積を最小にしており安定なので自然界に現れる．このように安定性は自然界に存在するための必要条件である．安定なら (11) により，∂D で消える任意の関数 ϕ について**安定不等式**

$$\int_D\phi^2|A|^2dA\le\int_D|\nabla\phi|^2dA \qquad (13)$$

が成り立つ．等温座標に関してはガウス曲率 $K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = -\frac{|A|^2}{2}$ だから，(13) は曲率の評価式であり，またガウス写像（単位法ベクトルを平行移動で S^2 の点と思う写像，図 3 参照）の像の面積の評価式にもなっている．

8. 応用

上に述べたように，極小曲面の安定性は曲面の曲がり方を制限する．安定性と，曲面の正則性にも関係する Bernstein の定理の証明をスケッチしよう．グラフのガウス写像の像は半球面に入るので，ガウス写像の除外値問題を扱う Osserman や藤本の手法もあるが，ここでは Colding–Minicozzi の議論を紹介する．少し高度な所は読みとばしてほしい．

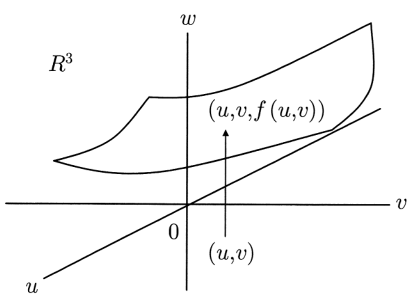


図 6 グラフで与えられる曲面．

定理 8.1 (Bernstein の定理) 全平面上のグラフ $G_f = \{(u, v, f(u, v))\} \subset E^3$ で与えられる極小曲面は平面のみである．

証明：以下，$\mathbb{R}^2$ の勾配ベクトル $df = (f_u, f_v)$ とそのノルム $|df|^2 = f_u^2 + f_v^2$, $\mathbb{R}^2$ のベクトル $X = (\xi^1, \xi^2)$ の発散 $\mathrm{div}_0 X = \xi^1_u + \xi^2_v$ を用いる．簡単な計算により，$dA = \sqrt{1+|df|^2}dudv$ なので，∂D で消える D 上の関数 ϕ による変分*2) $G_{f+t\phi}$ の面積は $\mathcal{A}(t) = \int_D \sqrt{1+|df+td\phi|^2}dudv$ である．

$$\mathrm{div}_0(\phi X) = (\phi\xi^1)_u + (\phi\xi^2)_v = d\phi \cdot X + \phi\,\mathrm{div}_0 X$$

より，境界で消える ϕ について，左辺の積分は発散公式により消えることに注意すると，$\mathcal{A}(t)$ の t についての展開の t の係数から

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{A}(t) = \int_D \frac{df \cdot d\phi}{\sqrt{1+|df|^2}}dudv = -\int_D \phi\,\mathrm{div}_0\Big(\frac{df}{\sqrt{1+|df|^2}}\Big)dudv \tag{14}$$

を得るので，G_f が極小であるのは発散方程式

$$\mathrm{div}_0\Big(\frac{df}{\sqrt{1+|df|^2}}\Big) = 0 \tag{15}$$

をみたすときであることが分かる．G_f の単位法ベクトル $N = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+|df|^2}}$ を $D \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場に拡張し，$D \times \mathbb{R}$ 上の 2 形式 ω を

$$\omega(X, Y) = \det(X, Y, N), \quad X, Y \in T(D \times \mathbb{R})$$

で定める．$D \times \mathbb{R}$ の座標を (u, v, w) とすれば

$$\omega = \frac{-f_u}{\sqrt{1+|df|^2}}dv \wedge dw + \frac{-f_v}{\sqrt{1+|df|^2}}dw \wedge du + \frac{1}{\sqrt{1+|df|^2}}du \wedge dv$$

なので，(15) を座標で書くと ω が閉形式であることがわかり，さらに $|\omega(X, Y)| \leq |X \wedge Y|$ で，等号は $X \wedge Y$ が N と平行，つまり $X, Y \in TG_f$ のときに限る．このようなとき ω を $D \times \mathbb{R}$ 上のキャリブレーション，G_f をキャリブレイトされた曲面と言う．$\Sigma \subset D \times \mathbb{R}$ を任意の $\partial\Sigma = \partial G_f$ なる曲面とするとき，G_f と Σ を境界とする $D \times \mathbb{R}$ の領域 W に対して $0 = \int_W d\omega = \int_{G_f} \omega - \int_\Sigma \omega$ がストークスの定理により成り立つから，

$$\mathcal{A}(G_f) = \int_{G_f} \omega = \int_\Sigma \omega \leq \mathcal{A}(\Sigma) \tag{16}$$

を得る．実は D が凸なら，G_f は $D \times \mathbb{R}$ からはみ出ている曲面と比べても真に面積最小である．実際 D が凸のとき $D \times \mathbb{R}$ も凸だから，最近点への射影 $\pi : E^3 \to D \times \mathbb{R}$ は距離非増加なリプシッツ写像で，$D \times \mathbb{R}$ 上恒等写像である．$\Sigma' \subset E^3$ が $\partial\Sigma' = \partial G_f$ なる E^3 の曲面ならば $\Sigma = \pi(\Sigma')$ は $\mathcal{A}(\Sigma) \leq \mathcal{A}(\Sigma')$ をみたすから

*2) この変分は法方向にはとっていないが，議論に影響はない．

(16) より $\mathcal{A}(G_f) \le \mathcal{A}(\Sigma')$ となる．$D \times \mathbb{R}$ が半径 r の球面 B_r を含んでいるとき，$\partial B_r \cap G_f$ は ∂B_r を 2 つの部分に分け，少なくとも一方は高々 $\mathcal{A}(S^2)r^2/2$ の面積をもつから（ここに S^2 は半径 1 の球面），(16) より粗い評価

$$\mathcal{A}(B_r \cap G_f) \le \frac{\mathcal{A}(S^2)}{2} r^2 = 2\pi r^2 \qquad (17)$$

が成り立つ．つまり面積増大度が 2 次のオーダーであるという重要な結果が得られる．このとき次のことが知られている．グラフ上非負の対数的カットオフ関数 $\phi_j(s) = 1$, $s \le \mu^2 r_j$; $\log(sr_j^{-1})/\log\mu$, $\mu^2 r_j < s \le \mu r_j$; 0, $s > \mu r_j$, $(0 < \mu < 1)$ の列で $\phi_j \to 1$ なるものが存在して

$$\lim_{j\to\infty} \int_{G_f} |\nabla \phi_j|^2 = 0$$

をみたす．他方，上に述べた安定性から，(13) により

$$\int_{G_f} \phi_j^2 |A|^2 \le \int_{G_f} |\nabla \phi_j|^2$$

が成り立ち，結局 $A \equiv 0$ で，G_f は平面となる．

□

Bernstein 問題を高次元に拡張すると，予想外の結果となる．すなわち，$n < 8$ では E^{n-1} 上のグラフで与えられる E^n の極小超曲面は超平面しかないが，$n \ge 8$ では別の例がある．実際 $m \ge 4$ のとき極小錐

$$\begin{aligned} C_m &= \{(x_1, \ldots, x_{2m}) \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 \\ &\qquad = x_{m+1}^2 + \cdots + x_{2m}^2\} \\ &\subset E^{2m} \end{aligned}$$

は体積最小であることが Bombieri, De Giorgi, E. Giusti によって示され（1969），体積最小だが原点を特異点にもつ極小錐の存在が明らかになった．この議論は (17) を拡張したスケール不変体積の単調性に深く関わり，極小部分多様体の正則性（ひいては調和写像，Yang–Mills 接続，J-正則曲線，リッチが下からおさえられている多様体の極限空間の正則性）とも関係している．

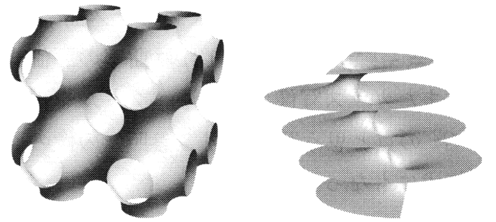


図 7　周期性をもつ極小曲面：シュワルツ P 曲面，リーマンの極小曲面．

9. いろいろなトピック

基本的な事柄で紙数が尽きてしまったが，一般のリーマン多様体，さらには非定値な多様体の極小（極大）曲面論，余次元の高い極小曲面，極小超曲面を含む極小部分多様体，その存在，安定性，位相や境界を固定したときの一意性，ガウス写像の除外値問題など様々な問題がある．さらに極小曲面は，ブラックホールの解析，ポジティブマス予想やポアンカレ予想の解決（リッチフローの解の有限時間消滅）にも用いられ，また実験・観察が可能になってきたナノスケールの曲面論において相分離に伴う高次構造との関連で物理学・化学・生物学分野にジャイロイド等の 3 重周期をもつ極小曲面が現れるなど，その重要性は枚挙にいとまがない（図 7）．平均曲率が零とは限らない一定の曲面にまで話題を広げると，さらに豊かな曲面論の世界が広がっていて，世界中で活発な研究が行われている．曲面論の動向については本誌のオーバーボルファッハ数学研究所での研究集会 “Progress in Surface Theory” の報告も参照していただきたい．

（みやおか・れいこ，東北大学大学院理学研究科）

複素解析と曲面

リーマン面



志賀　啓成

1. 無理関数と対数関数

無理関数 $\sqrt{x}$ や対数関数 $\log x$ は高校数学ではおなじみのものだが，どちらも正の実数 $x > 0$ で微分可能な関数である．言うまでもないが，$\sqrt{x}$ は $y^2 = x$ となる正の数 y を表し，$\log x$ は $e^y = x$ となる実数 y を表している．この関数やそのグラフを複素数 z でも考えたいと思うのは自然なことだ．表題にあるリーマン面をこの考え方で導入しよう．そのためにまず，複素数の無理関数や対数関数を考えることから始める．

複素数 z に関する無理関数 $\sqrt{z}$ はさほど難しくない．$w^2 = z$ となる複素数 w として定めてやればよい．ただし，このような w は $z \neq 0$ のときは 2 つ存在するので，どちらか一方ということになる．つまり，$\sqrt{z}$ は多価関数で，極座標 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，$\sqrt{z}$ は $\pm\sqrt{r}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$ となる．符号を $\pm$ のどちらにするのか困るのだが，これはどちらかを適当に決めるしかない．複素数の場合は実数とは違い，正の数と負の数の区別がないのだから致し方ない．

対数関数 $\log z$ も $e^w = z$ となる複素数 w として定義してやればよいのだが，そもそも複素数 w に対して指数関数 e^w とは何ぞや，というところから始めなければならないので面倒になるが，ここを端折ると，$z \neq 0$ のとき $\log z = \log|z| + i\arg z$ ということが分かる．ここで $\arg z$ は z の偏角である．しかし $\arg z$ といっても 2π を加減する自由度があるから，無限個の取り方がある．したがって，$\log z$ も多価関数で，その値は z の偏角のうち好きなものを一つ取って定まるということになる．

ともかくも，こんな風に定義したのだが，両者とも取り方がいくつもあるという曖昧なところが落ち着かない．実際，こんな奇妙な計算がある．

$$1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1. \quad (1)$$

$1 = -1$ を導く計算が成り立つようでは，複素数を用いた根号計算は危なくてしょうがない．はたして何がおかしいのか．これは次節で考察しよう．

2. 解析接続

前節で持ち上がった問題を解決するためにやや迂遠であるが，“解析接続” という考え方を用いる．まず，簡単な例でこれを説明する．次の等比数列の公式はおなじみであろう．

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1). \quad (2)$$

この証明は因数分解

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \quad (3)$$

を用いて，$n \to \infty$ とすればよい．ただし公式 (2) で $n \to \infty$ のとき，$x^n \to 0$ が必要であるから，$|x| < 1$ という条件は落とせない．

公式 (2) が文字 x の公式 (3) より従うのであるから，x のところを複素数 z に変えても何の問題もない．よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \tag{4}$$

となる．ただし，やはり $z^n \to 0$ であることは必要で，$|z|<1$ という条件がつく．しかしその一方で，右辺の $1/(1-z)$ という関数は $z \neq 1$ であればすべての複素数 z に対して定義できる関数である．例えば $z=-3/2$ のとき，右辺は $2/5$ となるが，左辺はもちろん発散する．この現象を説明しよう．1 でない複素数 a に対して

$$\begin{aligned} 1-z &= 1-a-(z-a) \\ &= (1-a)\left\{1-(1-a)^{-1}(z-a)\right\} \end{aligned}$$

であるから，$|z-a||1-a|^{-1}<1$ ならば

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{1-(1-a)^{-1}(z-a)} \\ &= \frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^{-n}(z-a)^n. \end{aligned}$$

となる．最後の式は $(1-a)^{-1}(z-a)$ を (4) において z の代わりに使って得られる．

ここで複素数 z の条件 $|z-a||1-a|^{-1}<1$ は $|z-a|<|1-a|$ に他ならない．これは z が a を中心とした半径 $|1-a|$ の円の中にあることを示している (図 1)．ここで $|a|<1$ ととれば，この新しい円の内部は $|z|<1$ と交わる．その共通部分では 2 つの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ と $\frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^{-n}(z-a)^n$ は同じ $1/(1-z)$ から導かれたものであるから，両者は一致するはずである．

つまりこういうことになる．もともとの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $|z|<1$ がその定義域であったが，上のような工夫をすることでその定義域が拡大されたのだ．このような操作を繰り返し行うことで，$z \neq 1$ である任意の複素数 z に対して $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の定義域を広げて値を求めることができ，それは $\frac{1}{1-z}$ の値と一致する．例えば $-1<a<-3/4$ のときに得られる新しい円の内部は上で問題にした $z=-3/2$ を含むので，新しい級数の値として定義することができるのだ．

解析接続とは，このような操作を一般の整級数 $P(z;a)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ に用いる考え方である．少し教科書的に述べると，a から b へ至る曲線 C を考える．C 上に点 $a_0 := a$ と a_1 を取り，次の条件を満たすと仮定する．点 a_1 は a_0 の収束円の内部にあり，かつ a_1 を中心として $P(z;a)$ を Taylor 展開した整級数—これを $P_1(z)$ と書こう—にその定義域がもとの収束円を越える (図 2)．このような a_1 が存在したとき，$P_1(z)$ に対して同じ条件を考える．もしこの条件を $P_1(z)$ に対して満足する点 a_2 が C 上に存在したとすると a_2 中心の整級数 $P_2(z)$ が得られる．以下，C に沿って点 $a_3, \ldots$ と整級数 $P_3, \ldots$ を取り，この操作を続ける．この操作が曲線 C に沿って b まで続けられるとき (図 3)，$P(z;a)$ は曲線 C に沿って**解析接続可能**であると言う．先ほどの例で言えば，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $|z|<1$ 内の任意の点 a と $b \neq 1$

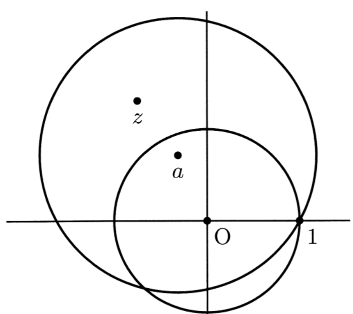


図 1　定義域の拡大．

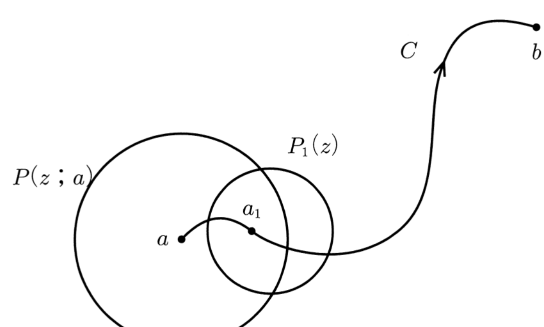


図 2　Taylor 展開の拡大．

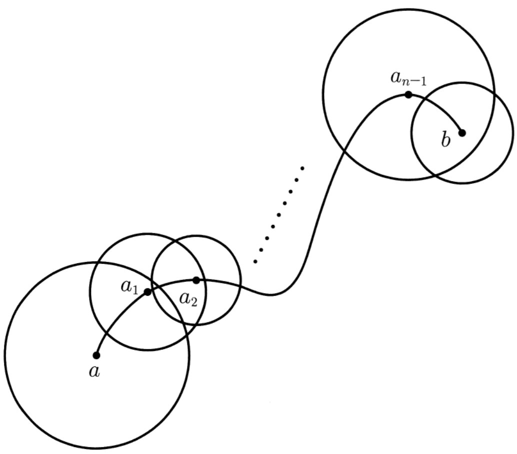


図 3　解析接続.

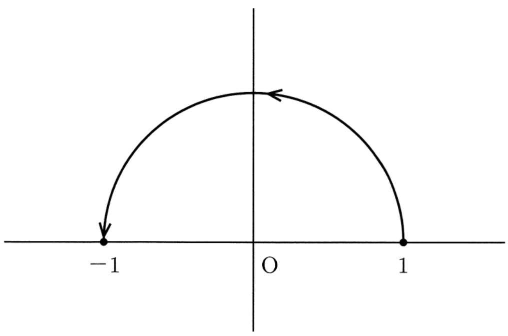


図 4　半円を回る.

なる任意の複素数を結び，$z=1$ を通らない曲線 C に沿って解析接続可能である.

では，ここで式 (1) の不条理な理由を指摘しよう. (1) は複素数の根号を扱っている. したがって $\sqrt{z}$ の解析接続の話になる. この観点から $1=\sqrt{(-1)^2}$ がおかしい. $\sqrt{(-1)^2}$ は $\sqrt{z^2}$ を 1 から -1 へ至る半円に沿って解析接続したものである (図 4). $1=\sqrt{1}$ とすれば，$z=1$ の近傍では $\sqrt{z^2}=z$ なのだから，(それを解析接続して) 当然 $\sqrt{(-1)^2}=-1$ である. 初めに述べた「$\sqrt{z}$ は 2 乗して z となる複素数のどちらか一方」という曖昧さがこの混乱の原因とも言える.

3. 解析接続のリーマン面

ここで，点 a とそこでの整級数 $P(z;a)$ を考え，これを解析接続して得られるもの全体を考える. 正確に言えば，ある点 b と点 a を結ぶ曲線 C に沿って $P(z;a)$ が解析接続可能ならば，それによって得られる整級数 $P_C(z;b)$ すべてを考えるのだ*1). そして，点 b と解析接続で得られるものの組 $(b,P_C(z;b))$ の全体を考える. これを $P(z;a)$ の**解析接続のリーマン面**と呼び，$\mathcal{R}$ と書くことにする. すると，$(b,P_C(z;b))$ は $\mathcal{R}$ の一つの点と見なされる. このように $\mathcal{R}$ は点とその点で定義される関数の組であるから，実数関数 $y=f(x)$ のグラフ—それは $(x,f(x))$ の全体である—と同じようなものと考えることができる (図 5)*2).

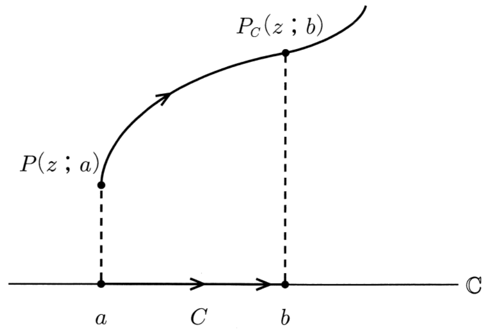


図 5　解析接続のリーマン面.

実数関数のグラフの類型であることで問題になるのは，解析接続のリーマン面 $\mathcal{R}$ の形がどうなっているのかということだ. しかし定義からでは，そのままでは目に見える形にすることは難しい. そこで簡単な例で考えてみよう.

(1) 最初の例. 前の節で取り上げた $P(z;0)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を考える. この場合，$P(z;0)$ は $(1-z)^{-1}$ という関数を $|z|<1$ で考えたものに他ならないから，その特異点 $z=1$ を通らない任意の曲線 C に沿って解析接続可能である. これは前の節でおこなった計算によれば，

*1)　このままでは漠としており，しかもとてつもなく大きな対象となるが，複素解析の「一致の定理」という結果を使うと，曲線 C をすべてにわたって考える必要はない. これは次の事実による；a,b を結ぶ 2 つの曲線 C_1,C_2 が両端点を固定して，一方から他方へ連続変形可能で，しかもその変形途中の曲線に沿っても $P(z;a)$ が解析接続可能であるときには，$P_{C_1}(z;b)$ と $P_{C_2}(z;b)$ は同じ整級数になる.

*2)　ただし，第 2 成分が関数の値ではなく整級数になっていることは時に注意が必要である.

$$P_C(z;b) = \frac{1}{1-b}\sum_{n=0}^{\infty}(1-b)^{-n}(z-b)^n$$

である．結局，点 b を終点に持つ曲線 C に対して，$P_C(z;b)$ は $(1-z)^{-1}$ を b の周りで整級数展開したものになり，したがって，整級数 $P_C(z;b)$ は C の終点 b のみに依存し，C の形状には依らない．よって $\mathcal{R}$ の点 $(b, P_C(z;b))$ は第 1 成分 b だけで決まることになる．この意味で $\mathcal{R}$ は複素平面から $z=1$ を除いたものと同一視される．要するに，面倒なことを述べてきたが，$P(z;0)$ のグラフたる $\mathcal{R}$ は $\mathbb{C}-\{1\}$ と同じと見なせるのである．

(2) 無理関数． $P(z;1)$ を $\sqrt{z}$ の $z=1$ での整級数展開としてみる．ただし $z=1$ での値は 1 となるようにとる．言い換えれば $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ という関数を整級数展開したものである．$\sqrt{z}$ は $z \neq 0$ では微分可能なので，$z=0$ を通らない曲線 C に沿って解析接続可能である．ここで C として $z=1$ を通り原点の周りを正の方向に 1 回転する円を考える．$\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ において偏角 θ は 0 から 2π まで動くから，$\theta/2$ は当然，0 から π まで動く．したがって，このような曲線 C に沿って $P(z;1)$ を解析接続して得られる整級数 $P_C(z;1)$ は $-P(z;1)$ となることが分かる．このような考え方を敷衍すると，第 1 座標が $b(\neq 0)$ の $\mathcal{R}$ の点は $(b, P(z))$ と $(b, -P(z))$ という形であり，$P(z)$ を b を終点と始点として，原点の周りを 1 回回る閉曲線 C に沿って解析接続をすれば $-P(z)$ が得られることがわかる．このような $\mathcal{R}$ を (1) のように目に見える形にすることを考えよう．

複素平面 $\mathbb{C}$ を原点から無限に伸びる半直線 L に沿って切れ目を入れたものを X_1 とする．X_1 で切り口 L の両側には 2 つの岸ができる．この 2 つの岸に $(+)$ と $(-)$ のラベルを付ける．X_1 と同じものをもう一つ用意し，これを X_2 とする．X_1 の $(+)$ の岸の点と X_2 の $(-)$ 岸の対応する点どうしを貼り合わせて，X_1 の $(-)$ の岸と X_2 の $(+)$ の岸を貼り合わせる．このようにして作ったものを X とすると，X は $\mathcal{R}$ を具現している（図 6）．なぜそうなるのかは以下の例とともに各

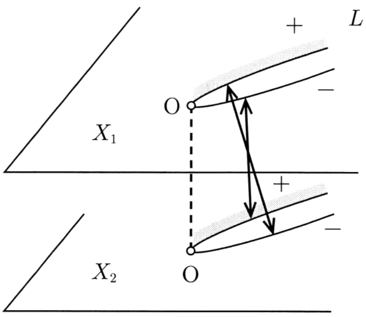


図 6　$\sqrt{z}$ のリーマン面．

自確かめてほしい．

(3) 対数関数． 対数関数 $\log z = \log|z| + i\arg z$ も $\sqrt{z}$ と似たような方法で $\mathcal{R}$ を構成できる．ただし，$\sqrt{z}$ の場合は，± の 2 つの候補しかなかったので，原点を 2 回回る閉曲線に沿って解析接続すれば，元の整級数に戻ったが，$\log z$ の場合は原点の周りを 1 回転すると偏角が 2π 変わる．したがって n 回回れば $2n\pi$ 変わり，元には戻らない．というわけであるから，対数関数の場合は複素平面に原点から無限に伸びる半直線に沿って切れ目を入れたコピーを無限個用意し，$\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots$ と番号をつけて並べる．各 X_n には L によってできた 2 つの岸 $(+), (-)$ がある．そこで X_{n-1} の $(+)$ の岸と X_n の $(-)$ の岸の対応する点どうしを貼り合わせるのである．この操作を $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ と行なうと，用意した無限個の X_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ が一つに繋がったものができる．これを X とすると，X が対数関数に対して $\mathcal{R}$ を具現しているのである（図 7）．

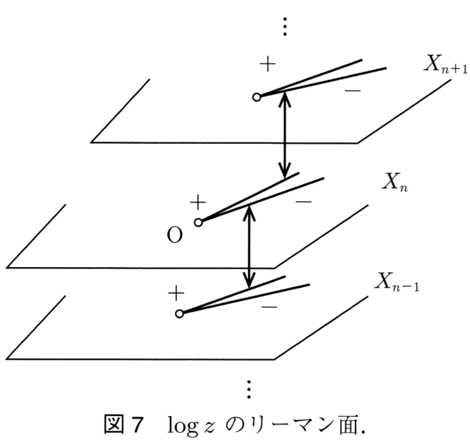


図 7　$\log z$ のリーマン面．

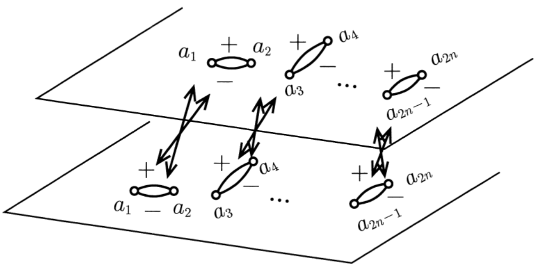


図8　無理関数のリーマン面.

(4) 高次の無理関数. (2) では $\sqrt{z}$ を考えたが，今度は $\sqrt{P(z)}$ を考えよう．ただし $P(z)$ は n 次の多項式 $(n \geq 1)$ で，相異なる n 個の複素数 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて $P(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_n)$ と書けているとする．

$\sqrt{P(z)}$ は $\sqrt{z}$ と $P(z)$ の合成関数であり，$\sqrt{z}$ は $z = 0$ を除いて微分可能で，局所的に整級数として書ける．したがって，$\sqrt{P(z)}$ も $P(z) = 0$ となる点を除いて局所的に整級数で書ける．つまり，$a_1, \ldots, a_n$ 以外ではOKなのである．ただし，常に $\pm$ の2つの自由度はある．$\sqrt{P(z)}$ に対して $\mathcal{R}$ の構成のアイディアは $\sqrt{z}$ と同じで，n が偶数のときは，a_{2k-1} と a_{2k} を互いに交わらない曲線 C_k で結び $(k = 1, \ldots, n/2)$，$\mathbb{C}$ を $C_1, \ldots, C_{n/2}$ に沿って切れ目を入れたものを2つ用意し，それらを (2) の要領で貼り合わせて X を作る（図8）．n が奇数のときは，a_{2k-1} と a_{2k} $(k = 1, \ldots, (n-1)/2)$ を結ぶ曲線 C_k と a_n から無限に伸びる曲線 C_n に沿って切れ目を入れて同様に X を作ればよい．この X は $\sqrt{P(z)}$ に対して $\mathcal{R}$ を実現している．

4. リーマン面

さて，(1) から (4) までの $\mathcal{R}$ の具体例を見てきたが，もともとの $P(z; a)$ の解析接続が多価であっても，$\mathcal{R}$ を実現する X 上では一価になっている．例えば $\sqrt{z}$ は $z = b \neq 0$ で2つの値を取り得るが，曲線 C で得られる解析接続とのペアを考えることで点に区別を与えている．$P(z; a)$ の解析接続の多価性を，定義域を変更することで解消して，X 全体で定義された関数としたのである．「鳴かぬなら鳴かせてみせようホトトギス」である．さらに，このように定義された X 上の関数は“複素微分可能”でもある．微分可能という概念は局所的なものであり，X はその構成から局所的には複素平面と同じである．したがって X で定義された関数は，もともと整級数で微分可能であるから，X の持つ“局所的な複素座標”について微分可能になるのだ．

このように $\mathcal{R}$ を実現する X は分かりやすいが，その構成法があまりに具体的すぎて，汎用性に欠けるきらいがある．これを克服するため，上に述べた“局所的な複素座標”を持つという X の性質を抽出して，この性質を持ったものを**リーマン面**と呼ぶ．もう少し詳しく言うと，この局所的な複素座標は，隣どうしのものは複素関数の意味で滑らかにつながっていなければならない．ともあれ，リーマン面とはローカルに複素平面の開集合と同じと見なせるもので，数学の言葉ではこれを**1次元複素多様体**と呼ぶ．

5. リーマン面の多様性

1次元複素多様体として定義されたリーマン面は，ローカルに複素平面と同じなのであるから，複素変数についての微分可能というローカルな性質はリーマン面でも定義できる．つまり，正則関数，有理型関数，留数といった概念がリーマン面上でも有効になるのだ．

もう一つ重要な事柄は，このように定めたリーマン面は，解析接続のリーマン面よりも多様性を増しているということである．荒っぽく言って，ローカルに複素平面と同じであればよいのであるから，解析接続などのような面倒なことを考える必要がない．複素平面の部分領域をたくさん用意して，それをパッチワークのように貼り合わせれば（ただし滑らかに貼り合わせる）リーマン面ができ上がる．したがって，ドーナツの表面だってリーマン面だし，それをいくつも並べてつないでもリーマン面になる．g 個ドーナツをつなぐと図9

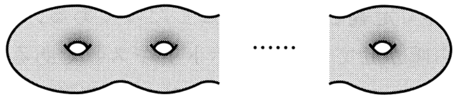


図 9　穴が g 個あいたドーナツの表面．

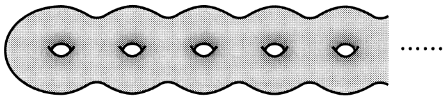


図 10　穴が無限に続くドーナツの表面．

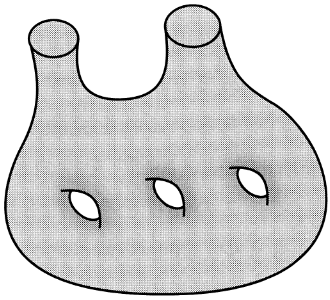


図 11　境界のあるリーマン面．

にあるような種数 g の閉曲面ができ上がる．もちろん無限個つなげても構わない（図 10）．また，図 11 のように境界をつけても構わない．このような境界付きリーマン面 X に対して，その X と“境界に対して対称な”リーマン面 X' を考えることができる．この X と X' をその境界に沿って貼り付けると閉じたリーマン面 R ができ上がる（図 12）．このリーマン面 R はもともとの X の境界についての対称性を持っている．それゆえ X の性質が R に伝播することもある．例えば境界上で絶対値が 1 であるような X での有理型関数は“対称に” R まで有理型関数として拡張される（鏡像の原理）．

さて，このように多様なリーマン面であるが，これが一体どれくらいの「多様性」を持っているかを考える．例えば種数 g のリーマン面は一体どれくらいの量があるのか，どれほどの数のパラメータで記述されるのかを問題にする*3)．

この種の計算はいくつか方法があるが，ここでは変換群を用いたアイディアを紹介する．まず，

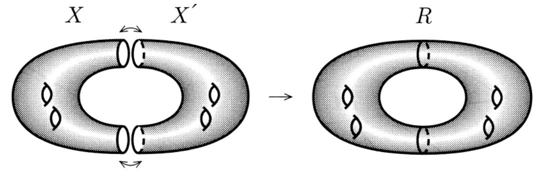


図 12　対称なリーマン面から閉じたリーマン面を作る．

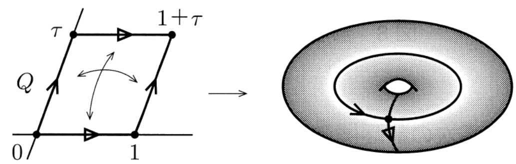


図 13　トーラス．

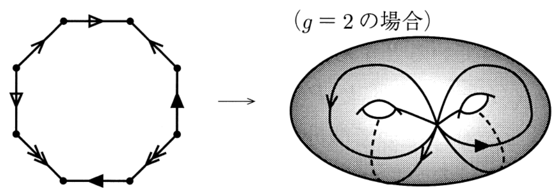


図 14　多角形からリーマン面を作る．

最も簡単な $g=1$，すなわちトーラスの場合を考えよう．複素数 $\tau=u+iv$ を $v>0$ ととる．4 点 $0,1,\tau,\tau+1$ を頂点とする平行四辺形 Q を，その対辺をそれぞれ平行移動 $\gamma_1(z)=z+1, \gamma_2(z)=z+\tau$ で同一視するとトーラスができ上がる（図 13）．実はすべてのトーラスはこのように構成されることが知られている．よってトーラスは（ローカルに）平行移動 $\gamma_2(z)=z+\tau$ によって決まる．また τ を動かせば，$\gamma_2(z)$ も変動し，実際にトーラスの変形が起きる．したがってトーラスは複素数 τ という複素 1 次元のパラメータで記述される．

種数が $g>1$ のリーマン面についてもこのアイディアは有効であるが，状況はかなり複雑になる．トーラスは平行四辺形，すなわち 4 つの辺を持つ図形の 2 つの辺の組を同一視してできたが，種数 g の場合も $4g$ の辺を持つ多角形から 2 つの辺をペアにして $2g$ 個の組を考え，その組に属する辺どうしをある変換で同一視してできる（図 14）．この場合の変換は，トーラスの場合のように平行移動というわけにはいかず，$\gamma(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$（た

*3)　ただし，2 つのリーマン面の間に複素解析的に滑らかな同相写像が存在するときにはその 2 つは同じと見なす．

だし a, b, c, d は実数で $ad-bc=1$）の形，いわゆる一次分数変換になる．辺を同一視する変換の数は $2g$ で，その形からそれぞれの変換は 3 つの実数で決まる．よってパラメータの数は $2g \times 3 = 6g$．ここで，詳しくは述べないが，いくつかの正規化条件と $2g$ 個の変換の間にある関係式を考慮するとパラメータの数はさらに 6 個減り，結局 $6g-6$ 個の実パラメータで記述される．

このような考え方の一つのメリットは「抽象的なリーマン面がどれくらいあるか，その全体を考える」という漠とした問題が，平行移動や一次分数変換というような具体的な変換の問題になることである．同時に，このような解釈によって新たな興味の対象も生まれてくる．例えばトーラスの場合，パラメータ τ が実数であれば，上の平行四辺形 Q はつぶれてしまいリーマン面として意味をなさなくなる．つまり，実数というのはトーラス全部を集めた空間の中の**境界**として出現する．一般の種数 $g>1$ のリーマン面でも同様に境界というものが出現するが，こちらはもっと複雑で実際には境界そのものにいくつかの種類が存在している．また，リーマン面を次元を上げた 3 次元のオブジェクトの境界とする見方があり，これも境界を研究する有力な手段となっている．これには複素解析だけではなく，双曲幾何，特に Klein 群論が必要なのだが，それによって境界の持つ摩訶不思議な様相が明らかになってきている．

ここまでは種数が有限の話であるが，種数が無限大のリーマン面に対しても問題意識は同じだ．これは無限次元をその理論に内包せざるを得ないが，今のところ，過去に知られていた理論に新たな研究で混沌が加わりつつあるといった様相に見える．

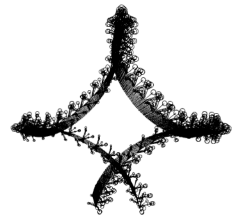
参考文献

1) H. ワイル（田村二郎訳）:『リーマン面』，岩波書店．
2) 今吉洋一・谷口雅彦:『タイヒミュラー空間論』，日本評論社．

（しが・ひろしげ，東京工業大学大学院理工学研究科）

特集／曲面の不思議

向き付け不可能な閉曲面



阿 原　一 志

1. メビウスの帯 M^2

長方形の紙を用意して，図 1 のように辺を一ひねりして貼り付けたものを**メビウスの帯**と言います．メビウスの帯のことを M^2 と書くことにします．メビウスの帯を実際に作ってみるとわかりますが，表面と裏面の区別がないことがわかります．

メビウスの帯をその一部分に含むような曲面のことを**向き付け不可能な**（**non-orientable**）**曲面**と言いますが，本稿では向き付け不可能な閉曲面の分類について解説しましょう．大学の数学科であれば 3 年生の幾何学で学習する内容ですが，パズルとしても面白いので，楽しんでいただけると幸いです．

以降，本文中・図中において曲面が同相であることを簡単のために “=” で書くことにします．

2. 射影平面 P^2

メビウスの帯には**境界**（面の縁）がありますが，これを指でたどってみると，境界は 1 つの円周であることがわかります．

そこで，円板 D^2 を用意して，メビウスの帯の

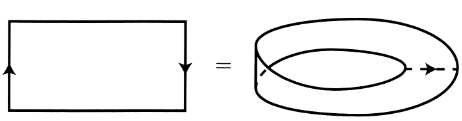


図 1　メビウスの帯 M^2.

境界と円板の境界をぴったり貼り合わせて 1 つの曲面を作ることを考えます．自己交差が起こらないように貼ることはできませんから想像しにくいですが，ともかく貼ることはできます．この曲面には境界がありませんから閉曲面だということになりますが，この曲面のことを**射影平面**と言って P^2 で表します．

P^2 は円形の紙を用意して，図 2 左のように上半分と下半分の円弧を貼り合わせることによっても得ることができます．図 3 がその証明です．

3. クラインの壷 K^2

長方形の紙を図 4 左のように貼り合わせたものを**クラインの壷**と言って，K^2 で書くことにします．これは向き付け不可能な閉曲面の例として最

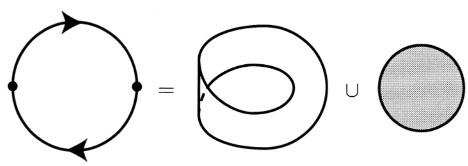


図 2　射影平面 P^2.

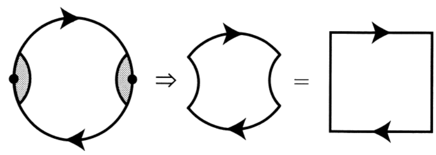


図 3　証明.

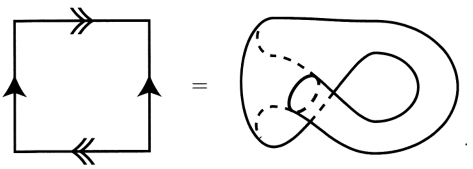


図 4　クラインの壷 K^2.

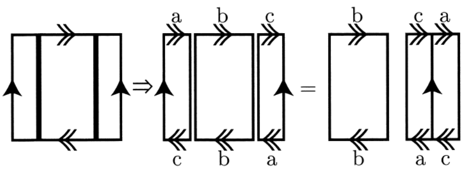


図 5　証明.

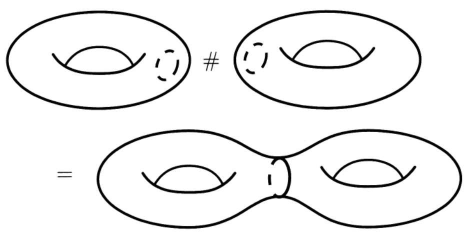


図 6　連結和.

も有名なものでしょう．実はクラインの壷は，2 つのメビウスの帯を貼り付けたものなのです．つまり $K^2 = M^2 \cup M^2$ です．図 5 がその証明です．

4. 連結和

2 つの曲面が与えられたとき，その双方から小さな円板を取り除き，そこを繋げたものを**連結和**と言います (図 6)．連結和を繰り返せば，様々な曲面を作ることが可能です．一つ実例を挙げますと，P^2 から小さな円板を取り除いたものが M^2 ですから，$K^2 = M^2 \cup M^2$ からただちに $K^2 = P^2 \# P^2$ を導くことができます．

5. 向き付け不可能な閉曲面の分類定理

向き付け不可能な閉曲面を作ろうというのなら，P^2 や K^2 をたくさん連結和すればよさそうです．実際，$P^2 \# P^2 \# \cdots \# P^2$ は向き付け不可能な閉曲面になりますが，実は向き付け不可能な閉曲面

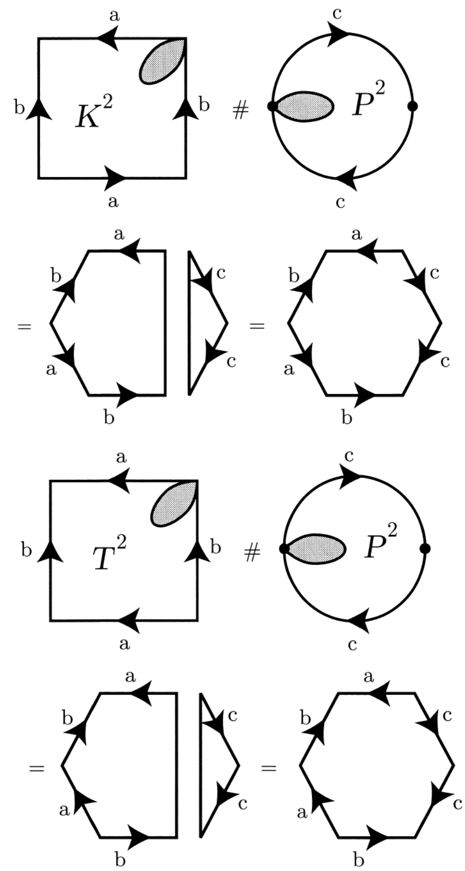


図 7　$K^2 \# P^2$ と $T^2 \# P^2$.

はこの形に限ることが証明できます．証明は参考文献に譲りますが，**2 次元トーラス** T^2 に関する次の命題が本質的です．

$$K^2 \# P^2 = T^2 \# P^2.$$

図 7 を見てください．$K^2 \# P^2$ を連結和の定義に従って構成すると，6 角形の展開図が得られます．同様に $T^2 \# P^2$ の展開図も作ることができます．この 2 つは見た目は異なりますが，展開図をさらに切って貼り直すことによって一方をもう一方へと作り変えることができます．すなわち同相な曲面なのです．

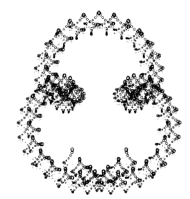
参考文献

1)　加藤十吉著，『位相幾何学』，裳華房 (1988).

（あはら・かずし，明治大学理工学部）

特異点をもつ曲面の幾何学

ガウス・ボンネの定理と特異点



梅原 雅顕

平面正則曲線の曲率関数の臨界点を，与えられた曲線の「頂点」と言います．自己交叉を持たない正則閉曲線には少なくとも4個の頂点が存在する，という事実は「4頂点定理」と呼ばれ，平面曲線に関する深い定理の一つです[8)]．筆者はこの定理に大学院生のときから興味をもっていたのですが，1996年頃Max Planck研究所に滞在中Tabachnikov氏に出会い，波面として曲線を捉えると，頂点が波の時間発展で保存される概念であることを教わりました．それがきっかけでバイロイト大学でArnol'd氏の特異点に関する集中講義に参加し，「特異点」の重要性を学びました．数年後，北海道大学の泉屋周一先生が（筆者が当時勤務していた）広島大学における集中講義に来られて，3次元双曲型空間のホロ球面に立脚した新しい曲面論の話をされました．当時の筆者には，未だ特異点論と微分幾何との接点は「平面曲線の頂点」だけでしたが，その講義に大変感銘を受けると同時に，「特異点をもつ曲面」を微分幾何的に扱う，という思わぬ視点を教わった次第です．そして当時，広島大学数学科の院生であった佐治健太郎氏（現在，岐阜大学）と微分幾何的な視点から曲面に現れる特異点の研究を開始し，東京工業大学の山田光太郎氏，東京電機大学の國分雅敏氏，神戸大学のWayne Rossman氏，福岡教育大学の藤森祥一氏等の協力を得て，特異点をもつ曲面に関する研究を7，8年継続してまいりました．ここでは，最近の筆者の佐治氏と山田氏との3人の共同研究に関連した内容を紹介します．

1. ガウス曲率と測地的曲率

Euclid空間 $\mathbf{R}^3$ において，ガウス曲率が正と負の曲面の意味について復習しよう．

$\mathbf{R}^3$ の正則曲面上の点 p を中心とする半径 r の測地円の周長を $L_p(r)$ とすると

$$K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r - L_p(r)}{r^3}\right) \qquad (1)$$

によってガウス曲率 K が与えられるが[8)]，$K(p)$ が負ならば，曲面は鞍状になっており（図1左），$K(p)$ が正ならば，お椀状になる（図1右）．

ところで，曲面上に正則曲線 $\gamma(t)$ があったとする（微分 $\gamma'(t)$ が決して零にならないとき，曲線 $\gamma(t)$ は**正則**であると言う）．そして，その曲線を空間曲線と思ったものを $\hat{\gamma}(t)$ で表す．

曲線の助変数 s を弧長にとり，$\hat{\gamma}(s)$ をベクトル値関数と思って2回微分したものを $\hat{\gamma}''(s)$ で表す．いま，曲線 $\hat{\gamma}(s)$ に沿う曲面の単位法線ベクトル場を $\nu(s)$ で表し，ベクトル

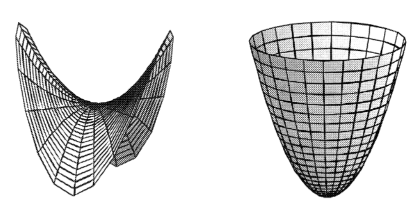


図1　双曲放物面と楕円放物面．

$$\boldsymbol{k}_g(s) := \hat{\gamma}''(s) - (\hat{\gamma}''(s)\cdot\nu(s))\nu(s)$$

を考えると，これは $\hat{\gamma}''(s)$ の曲面の接平面への射影を与える．ν の方向を曲面の表側と考えて，そこで曲線の進行方向左向きに $\pi/2$ だけ単位接ベクトル $\hat{\gamma}'(s)$ を回転させて得られる単位ベクトルを $\boldsymbol{n}(s)$ で表し，曲線の**余法線ベクトル**と言う．ベクトル $\boldsymbol{k}_g(s)$ は，$\hat{\gamma}'(s)$ に直交するので $\boldsymbol{n}(s)$ に比例し，

$$\boldsymbol{k}_g(s) = \kappa_g(s)\boldsymbol{n}(s)$$

なる実数 $\kappa_g(s)$ が定まるが，この値を曲線 $\hat{\gamma}(s)$ の与えられた点における**測地的曲率**と言う．定義により $\kappa_g(s)$ が正ならば曲線は，左曲がりとなり，負ならば右曲がりとなる．また κ_g が恒等的に零となる曲線は，その曲面における局所的な最短線を与える．曲線を，弧長パラメータとは限らない一般の助変数 t を用いて $\hat{\gamma}(t)$ と表示すると，各点における測地的曲率は

$$\kappa_g(t) := \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3} \tag{2}$$

で与えられる．但し det は行列式を表す．

2. ガウス・ボンネの定理

$\mathbf{R}^3$ に，はめ込まれた曲面 M を考える（曲面は通常，surface の頭文字 S を用いるが，ここでは曲面の特異点を扱う都合上，後に曲面を 2 次元多様体（2-manifold）から $\mathbf{R}^3$ への写像と見なすため，曲面を M で表す）．M の単連結な領域 Ω が，3 つの**測地線**（測地的曲率が零となる弧長をパラメータとする曲線）によって囲まれており，これら 3 つの測地線の継ぎ目である点 A, B, C で Ω の内角 ∠A, ∠B, ∠C が π より小さい角度となるとき，Ω を**測地三角形**と呼ぶ．このとき

$$\int_\Omega K dA = \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} - \pi$$

が成り立つ．これを**局所版ガウス・ボンネの定理**と呼ぶ．特に負曲率の曲面上の測地三角形の内角の和は 2 直角より小さくなり，逆に正曲率の曲面上の測地三角形の内角の和は 2 直角より大きい．

一般に Ω が必ずしも測地線とは限らない 3 つの正則曲線で囲まれている場合には，三角形の各辺に（曲面の単位法線ベクトルの方向を表側と思ったとき）Ω を左手に見る向きをつけて，測地的曲率 κ_g を考えると

$$\int_\Omega K dA + \int_{\partial\Omega} \kappa_g ds = \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} - \pi \tag{3}$$

が成り立つ．ここで $\partial\Omega$ は Ω の境界としての 3 つの辺を表す．

一方 M が $\mathbf{R}^3$ の（向きづけ可能で，はめ込まれた）閉曲面のときには，M を三角形分割することにより，大域版のガウス・ボンネの定理

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K dA = \chi(M) \tag{4}$$

が得られる．これは閉曲面のガウス曲率の総和が曲面のオイラー数に一致することを述べている．ここでは公式 (4) を**ガウス・ボンネの定理**と呼ぶ．一つの辺の両側の三角形から定まる辺の向きは，互いに逆方向を向いており，各三角形領域上の公式 (3) を辺々加えると，測地的曲率の積分が，打ち消し合い，この三角形分割から決まる位相不変量としてのオイラー数

$$\chi(M) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{三角形の数})$$

が総和として残るという仕組みである[8)]．

3. 平行曲面と特異点

曲面に特異点が自然に現れる典型的な例を紹介する．U を uv-平面 $\mathbf{R}^2$ の領域とする．C^∞-写像 $f = f(u,v) : U \to \mathbf{R}^3$ が**正則曲面**であるとは，偏微分 $f_u(u,v), f_v(u,v)$ が U 上のすべての点で一次独立になるときを言う．このとき，曲面の単位法線ベクトルは，ベクトル積 $\times$ を用いて

$$\nu := (f_u \times f_v)/|f_u \times f_v|$$

で与えられる．ここで分母の絶対値はベクトルの大きさを表す．t を実数とするとき

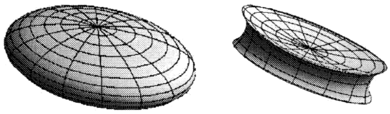


図 2　楕円面とその平行曲面 ($t = 1.2$).

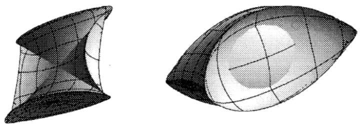


図 3　楕円面の平行曲面 ($t = 2$ と $t = 3.2$).

$$f_t(u,v) := f(u,v) + t\nu(u,v)$$

で定義される曲面を f の**平行曲面**と言う．これは実数 t を一つ指定するごとに定まるので，曲面の族となるが，一般に t の値が大きくなると f_t は特異点をもつ．例えば楕円面

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

の内向き単位法線ベクトルに関する平行曲面を考えると，図 2 あるいは図 3 のようになる（但し，曲面の大きさや方向は適当に調節した）．

これらの平行曲面は，一般に自己交叉をもつので，特異点は判別しにくいが，実際現れるのは，ほとんどすべての値 t において，カスプ辺とツバメの尾という特異点である．

但し，与えられた曲面の助変数表示 $f : U \to \mathbf{R}^3$ の特異点が**カスプ辺**であるとは，定義域（つまり uv-平面）の座標変換と値域 $\mathbf{R}^3$ の座標変換によって，f を標準的なカスプ辺（図 4 左）を与える写像

$$f_C(u,v) = (u^2, u^3, v)$$

に一致させることができるときを言う．また，f の特異点が**ツバメの尾**であるとは，定義域の座標変換と値域 $\mathbf{R}^3$ の座標変換によって，f を標準的なツバメの尾（図 4 中央，図 4 右はその裏側）を与える写像

$$f_W(u,v) = (3u^4 + u^2 v, 4u^3 + 2uv, v)$$

に一致させることができるときを言う．

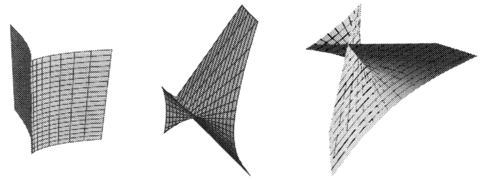


図 4　カスプ辺とツバメの尾.

4. 特異曲率

U を uv-平面 $\mathbf{R}^2$ の領域とし，$f : U \to \mathbf{R}^3$ をカスプ辺とツバメの尾のみを許容する曲面とする．すると，曲面の単位法線ベクトル場 ν は，特異点をこめてなめらかに拡張されることが知られている[7]．いま，特異点としてのカスプ辺に着目する．$\gamma(t)$ を uv-平面におけるカスプ辺に沿う曲線とすると，その特異点集合の像としての空間曲線

$$\hat{\gamma}(t) := f(\gamma(t))$$

は，$\mathbf{R}^3$ の正則曲線になる[3]．ここで，図 5 のように 2 つのタイプのカスプ辺を考える．

図 4 左のカスプ辺と見比べると，図 5 左のカスプ辺は，**負に曲がって**おり，図 5 右のカスプ辺は，**正に曲がっている**，と形容したくなる．この種の感性に馴染む新しい曲率の概念をカスプ辺に定義する．具体的には

$$\kappa_s(t) := \varepsilon(t) \frac{|\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu(t))|}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$

によって定義される値を，カスプ辺 $\hat{\gamma}(t)$ 上の**特異曲率**と言う．但し $\varepsilon(t)$ は，図 5 左あるいは右のようなカスプ辺に対して，それぞれ 1 と -1 をとるように値を定めたものである[5]．曲面の特異点集合の像として $\hat{\gamma}(t)$ は $\mathbf{R}^3$ の正則曲線でかつ曲面上にあるので (2) により測地的曲率を定義することができる．この意味で，特異曲率とは，「測地的曲率の極限に，適当な符号をつけて調節したも

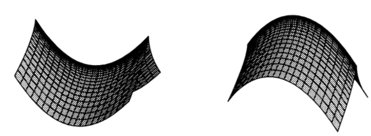


図 5　負と正のカスプ辺.

の」と考えることができる．

5. ガウス・ボンネの定理の一般化

M をコンパクトで向きづけられた 2 次元多様体とし，C^∞-写像 $f: M \to \mathbf{R}^3$ で，カスプ辺とツバメの尾のみを特異点として許容し，さらに滑らかな単位法線ベクトル場 ν が M 上で大域的に定義されていると仮定する．図 6 のような閉曲面は，カスプ辺のみを許す例であり，図 3 はカスプ辺とツバメの尾をもつ例になっている．このような f について，M の向きに同調した局所座標系 $(U; u, v)$ により，

$$dA := |\lambda| du \wedge dv, \quad \lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

で与えられる 2 次の微分形式は，そのような局所座標系によらず M 上で大域的に定義される．これを f の**面積要素**と言う．f がカスプ辺とツバメの尾しかもたなかったとすると

$$\int_{M \setminus S(f)} K_f dA + 2 \int_{S(f)} \kappa_s ds = 2\pi\chi(M)$$

が成り立つ．ここで $S(f)$ は f の特異点集合であり $\chi(M)$ は M のオイラー数である．また K_f は曲面 f の正則点におけるガウス曲率とし，ds は特異曲線上の線素とする．これは Kossowski[2] により示されたガウス・ボンネの定理の一般化であるが，特異曲率が曲面の位相に深く関わっているのがわかるだろう（但し Kossowski 氏は $\kappa_s ds$ を一次微分形式として扱っているので，特異曲率は定義していない）．証明には，閉曲面の三角形分割を行う際に，特異点集合が，辺や頂点になるように分割を行う．本来，すべての三角形からの曲率の寄与を足し合わせる際，三角形の辺を夾んで，左側の領域と右側の領域で，辺の向きが異なるため，測地的曲率の寄与が打ち消し合う．しかし，辺が

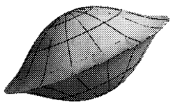


図 6　円盤型の閉曲面．

カスプ辺からなる場合には，像においては，値域における特異曲線の右側と左側の像は，共に同じ側に貼り付いているため，向きが異なるにも関わらず，測地的曲率が一致し，足し合わせる際に 2 倍となって特異曲率の積分として残る，という仕組みである．この状況で，今度はツバメの尾を考える．ツバメの尾はカスプ辺が折れ曲がっているわけだが，その折れ曲がった一方の側から見ると，π だけ左に折れ曲がっているように見える．すると，反対側を左に見るように，特異曲線の向きを逆転させると，もう一方の側は右に π だけ折れ曲がっているように見える．したがって，両者の寄与が互いに打ち消し合うのである．この公式から，我々の特異曲率の符号の選び方は，自然なものであることもわかる．

それでは，面積要素を選ぶとき dA ではなく

$$d\hat{A} := \lambda du \wedge dv$$

を考えたらどうなるであろうか．この $d\hat{A}$ を**符号つき面積要素**と言う．この面積要素に関するガウス曲率の全積分を考えると，今度はカスプ辺の両側で特異曲率が打ち消し合う．上述のように，ツバメの尾はカスプ辺が折れ曲がった形をしており，この特異点付近で曲面が自己交叉するのだが，その自己交叉する側に対応する定義域の領域が $\lambda > 0$ となるとき**正のツバメの尾**と言い（図 7 を見よ），そうでないとき**負のツバメの尾**と言う．カスプ辺の場合とは反対に，符号つき面積要素に関するガウス曲率の積分を特異点に沿う曲面の三角形分割で，ツバメの尾を頂点とするものを考えると，先ほど打ち消し合う原理が逆に働いて，その情報が

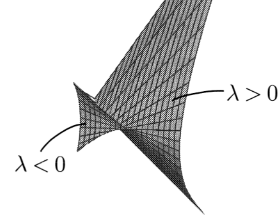


図 7　正のツバメの尾（この図では，特異点集合の像としてのカスプの鋭角の側が $\lambda < 0$）．

積分公式に残留する．その際，ツバメの尾の特異曲線の像が，λ が正の部分集合

$$M_+ := \{p \in M\,;\, dA_p = d\hat{A}_p\}$$

の側に折れ曲がっているのか（つまり負のツバメの尾の場合），または負の部分集合

$$M_- := \{p \in M\,;\, dA_p = -d\hat{A}_p\}$$

の側に折れ曲がっているのか（つまり正のツバメの尾の場合）によって，角度の和に差異が生じて，以下のような式となる．

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K_f d\hat{A} = \chi(M_+) - \chi(M_-) + W_+ - W_-.$$

この式はLangevin–Levitt–Rosenberg[4] により指摘された．ここで W_+ (W_-) は正（負）のツバメの尾の数である．この公式の左辺は曲面 f のガウス写像 $\nu : M \to S^2$ の写像度 $\deg(\nu)$ の 2 倍に等しい．つまり

$$2\deg(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_M K_f d\hat{A}$$

が成り立つことが知られている．$\deg(\nu)$ は写像 ν が球面を何回覆っているかを表す符号和であるので，この 2 つの式を合わせると，特にツバメの尾の数が偶数個であることがわかる．

この節で紹介した面積要素と符号付き面積要素に関する 2 つのガウス・ボンネ型の公式は，曲面が特異点を持たない場合には古典的なガウス・ボンネの公式に一致する．

6. 2 次元の曲面間の写像の特異点

前節で扱った閉曲面 $f : M \to \mathbf{R}^3$ は，特異点を許してはいるが，その単位法線ベクトル ν は，特異点でもなめらかに定義されている．いま，ν の始点を原点に平行移動することにより，原点を中心とする単位球面

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

への C^∞-写像として，写像 $\nu : M \to S^2$ が定まる．これを曲面 f の**ガウス写像**と言う．一般に，

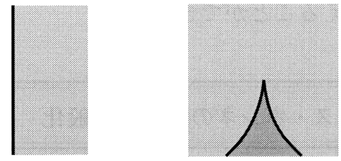


図 8　折り目とカスプ．

同じ次元の多様体間の C^∞-写像は，ヤコビ行列が退化する点を**特異点**と呼ぶ．ここではガウス写像 ν の特異点に着目する．簡単のため，元の閉曲面 f には，特異点がなかったとしよう．この場合，ワインガルテンの公式[8] により，ν の特異点とは，f のガウス曲率が零となる点に一致する．一般に，2 次元の曲面間の写像の特異点として最も頻繁に現れるのは，「折り目」と「カスプ」であることが知られている．但し，**折り目**とは

$$f_1(u, v) := (u^2, v)$$

で定まる $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像の原点における特異点のことで，形状としては，図 8 左のように，写像の像が直線の一方の側に二重に折れ曲がるように写される．一方

$$f_2(u, v) := (uv + v^3, u)$$

で定まる $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像の原点を**カスプ**と呼ぶ．実際 f の特異点集合は定義域では，放物線 $u = -3v^2$ となるが，f の像は $f(-3v^2, v) = (-2v^3, -3v^2)$ であり，形状としては，図 8 右のように，特異点集合の像は，原点を尖点とするカスプとなる．

上述のガウス写像 ν が，点 $p \in M$ に折り目（カスプ）を特異点としてもつとは，写像 ν の定義域の助変数表示と値域の S^2 の局所座標をうまくとると，上述の f_1 に（f_2 に）ピッタリ写像を一致させることができるときを言う．

7. Bleeker–Wilson の公式

C^∞-写像 $f : M \to \mathbf{R}^3$ を（$\mathbf{R}^3$ にはめ込まれた）曲面とする．つまり f は特異点をもたないと仮定する．さらに，M は向きづけ可能であっ

たとする．すると曲面には裏と表の区別がつくので，曲面上で大域的に定義された単位法線ベクトル場 ν が存在する．この単位法線ベクトル場の始点を $\mathbf{R}^3$ の原点に平行移動することでガウス写像 $\nu: M \to S^2$ が誘導される．いま ν が，特異点として折り目とカスプのみを許容したとしよう．f の平行曲面に相似変換を施した曲面族

$$f_t = \frac{1}{1+t}(f + t\nu) \quad (t \geq 0)$$

を考えると $t=0$ から $t=\infty$ とすることで，f から，そのガウス写像 ν への連続変形が得られる．この変形で曲面のガウス写像 ν が変化しないことに注意すると，f_t について符号つき面積要素に関するガウス・ボンネ型の定理は

$$2\deg(\nu) = \chi(M_+^t) - \chi(M_-^t) + W_+^t - W_-^t \quad (5)$$

となる．ここで $\chi(M_+^t)$ と $\chi(M_-^t)$ はそれぞれ f_t に対するガウス曲率が正の部分と負の部分のオイラー数である．また W_+^t, W_-^t は，それぞれ f_t の正のツバメの尾の数と負のツバメの尾の数を与える．特に $t=0$ のときには $f=f_0$ が特異点を持たないので，$M_+^0 = M$ であり

$$2\deg(\nu) = \chi(M) \quad (6)$$

となる．さらに

$$\chi(M) = \chi(M_+^t) + \chi(M_-^t)$$

が成り立つことに注意すると (5) と (6) により

$$2\chi(M_-^t) = W_+^t - W_-^t$$

が成り立つことがわかる．さらに，(5) において $t \to \infty$ と極限をとった式が意味をもつ．そして

$$d\hat{A}_\nu = K_f dA_f, \quad dA_\nu = |K_f| dA_f \quad (7)$$

が成り立つので

$$\lim_{t\to\infty} M_-^t = \{p \in M\,;\, K_f(p) < 0\}$$

となる．また，ν は S^2 への写像なので，$t \to \infty$ とすると，カスプ辺に対応する特異点は「折り目」に，ツバメの尾は「カスプ」に遷移する．そして W_+^∞，W_-^∞ は，それぞれ ν の正カスプの数と負のカスプの数を与える（但し，カスプが正とは，カスプの鋭角側の領域において，向きに同調した座標に関する ν のヤコビ行列が負になるときを言う）．そこで，

$$C_+(\nu) := W_+^\infty, \quad C_-(\nu) := W_-^\infty$$

とおくと，結局，以下の公式が得られる．

$$2\chi(\{K_f < 0\}) = C_+(\nu) - C_-(\nu). \quad (8)$$

これは Bleeker–Wilson の公式と呼ばれ[1)]，左辺の $\chi(\{K_f < 0\})$ は曲面 M のガウス曲率が負である部分のオイラー数を表す．つまり，特異点をもつ曲面に関するガウス・ボンネの公式を用いて，特異点のない曲面のガウス写像の特異点の情報を与える公式を示したことになる．

具体例を示そう．いま，回転トーラスの変形

$$f^a(u,v) = ((2+\varepsilon(v)\cos u)\cos v, \\ (2+\varepsilon(v)\cos u)\sin v,\ \varepsilon(v)\sin u)$$

を考える．但し $\varepsilon(v) := 1 + a\cos v$ とする．$a=0$ であれば通常の回転トーラス（図 9 左）である．$a = 4/5$ としたのが図 9 右である．この曲面は，輪の内側に膨らんだ箇所があり，ガウス曲率が負となる曲面上の領域は単連結となり，オイラー数が 1 になる．したがって，Bleeker–Wilson の公式によれば，そのガウス写像のカスプの符号和は 2 のはずである．ガウス写像は球面への写像なので特異点を認知するのが難しいため，その代わりに曲面の平行曲面 f_t^a で t の値を大きくして，ツバメの尾の数を数えてみよう．

図 10 の左と中央は t を，ある程度大きくしたときの $f^{4/5}$ の平行曲面 $f_t^{4/5}$ と，その一部であ

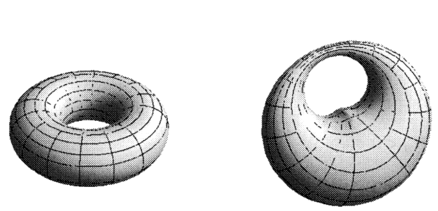


図 9　回転トーラスとその変形．

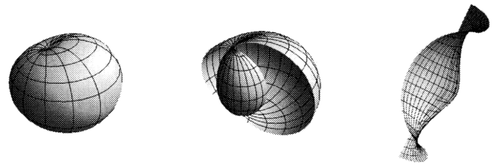


図 10　$f^{4/5}$ の平行曲面.

る．t の値が大きくなると，曲面の形は球体に近づく．図 10 の曲面もかなり球形に近づいている．この曲面の一部を拡大したのが，図 10 右であり，2 つのツバメの尾が確認できる．曲面の内側の部分は，元のトーラスのガウス曲率が負の部分であるので，2 つのツバメの尾は $t \to \infty$ とすると，共に正のカスプに収束する．つまり，ガウス写像はちょうど 2 つの正のカスプをもち，それは，元の曲面（図 9 右）のガウス曲率が負の部分のオイラー数の 2 倍に等しい．

8. その他の応用

前節の状況で，$d\hat{A}_{f_t}$ の代わりに面積要素 dA_{f_t} に関するガウス・ボンネ型の定理を記すと

$$\int_M K_{f_t} dA_{f_t} + \int_{S(f_t)} \kappa_s^{f_t} ds = 2\pi\chi(M)$$

となる．ここでも $t \to \infty$ とすると，(7) により

$$\lim_{t\to\infty} \int_M K_{f_t} dA_{f_t} = \int_M |K_f| dA_f$$

となる．また

$$\kappa_s^\nu = \lim_{t\to\infty} \kappa_s^{f_t}$$

は，ν の特異点集合の像としての球面曲線の測地的曲率の絶対値に，曲線の曲率円の位置する側と写像 ν の像の折れる側が一致するときに 1，そうでないとき -1 を符号として付与したもので，ガウス写像の特異点の（折り目としての）**特異曲率** κ_s^ν に一致する．つまり

$$\int_{K_f<0} K_f dA_f = \int_{S(\nu)} \kappa_s^\nu ds \tag{9}$$

が成り立つことがわかる．これは，筆者らのオリジナル[6] で，「ガウス曲率が負の部分の閉曲面 f の全曲率が，そのガウス写像の全特異曲率に等しい」ことを意味する．このように，新しく特異点を考えることで，特異点のない閉曲面についても，ガウス曲率が負の部分集合のオイラー数の情報や，ガウス曲率が負の部分の全曲率の情報を，ガウス写像の特異点の情報と結びつける公式を示せたことになる．

ガウス・ボンネの定理は，外の空間を払拭して 2 次元閉リーマン多様体について成り立つことが知られているが，ここで紹介した特異点つきのガウス・ボンネの定理も同じく，外の空間を払拭した定式化を与えることができて，他にも様々な応用が得られる[6]．

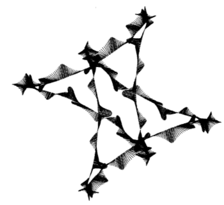
今回，紹介した公式 (8) と (9) の証明は，元の筆者らの論文では外の空間を用いずに示していたのですが，連接接束の概念を必要とするため，この記事のために筆者が考案したものです．特異点つきのガウス・ボンネの公式の高次元化は，まだ実現しておりませんが，筆者らは今，このような特異点の微分幾何的な研究の将来性に期待を寄せております．

参考文献

1) D. Bleecker and L. Wilson, Stability of Gauss maps, *Illinois J. of Math.* **22** (1978) 279–289.
2) M. Kossowski, The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞-singular surfaces with limiting tangent bundle, *Annals of Global Analysis and Geometry* **21** (2002), 19–29.
3) M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. Math.* **221** (2005), 303–351.
4) R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans $\mathbf{R}^3$, *Canad. J. Math.* **47** (1995), 544–572.
5) K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Geometry of fronts, *Ann. of Math.* **169** (2009), 491–529.
6) K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The intrinsic duality of wave fronts, arXiv:0910.3456.
7) 梅原雅顕,「特異点をもつ曲線と曲面の幾何学」, 慶應義塾大学数理科学セミナー・ノート 38 (2009).
8) 梅原雅顕・山田光太郎,『曲線と曲面—微分幾何的アプローチ—』, 裳華房 (2002).

（うめはら・まさあき，大阪大学大学院理学研究科）

物理学とリーマン面



細野　忍

1. はじめに

物理学に現れるリーマン面というと，ソリトン理論やその一般化であるKP方程式系などの可積分系との関わりが思い当たり，1970年代からの深い歴史があり今日もその関係はますます深まっている[1)]．ここでは，少し違った視点から，比較的新しい（とは言っても1990年代以降の）「弦理論」に現れるリーマン面を取り上げたいと思う．

2. 最小作用の原理から経路積分へ

19世紀の終わりから20世紀の初めにかけて，原子レベルの物理学に大きな変革が起こった．言うまでもなく，量子力学の発見であり現代生活において日々お世話になっている．量子力学の数学的な基礎付けはフォン・ノイマンによって行われることになるが，一方で物理学者ファインマンは，このような数学的厳密化とは異なる，経路積分というアイデアに基づいて量子力学を理解した[2)]．経路積分は，数学的な意味付けが困難である反面，物理的あるいは大局的な視点を可能にするため多くのアイデアの源泉となる．そのアイデアの一つが（位相的）弦理論である．

物理学法則の例として，ニュートンの運動方程式 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ は周知の法則であるが，18世紀を通してラグランジュやヤコビ，ハミルトンなどによって「最小作用の原理」と呼ばれる変分問題に基づいて理論的な整備が行われた．19世紀終わりから20世紀初頭にかけて，電子の運動など原子のレベルではニュートンの法則は修正が必要であると認識され，身の回りの質点の運動に関してはニュートンの法則に一致するような，ミクロの世界の新しい法則が求められた．興味深いことに，18世紀に行われていた純理論的な整備が大きな手がかりとなり，20世紀に入って新しい法則，量子力学の完成に至るのである．新しい物理定数として，お馴染みのプランク定数 $\hbar$ が導入され $\hbar\to 0$ の極限でニュートンの運動法則を再現する（発見当初は行列力学と呼ばれた）理論形式が発見され[3)]，シュレディンガー方程式という現在知られた形に至っている．

ニュートンの力学は初期値を与えると，その後の質点の運動は決定論的に決まってしまうが，量子力学ではそこに確率論的な解釈が導入される．時刻 t_a における質点の位置座標が $\boldsymbol{x}_a$ であるとき，時刻 t_b において $\boldsymbol{x}_b$ で質点が観測される確率，すなわちある量子状態から別の量子状態への遷移確率が基礎方程式によって決定される．基礎方程式は遷移確率 $P_{a\to b}$ を与える遷移振幅 $\psi_{a\to b}$ ($P_{a\to b}=|\psi_{a\to b}|^2$) を決定する．ファインマンの経路積分は，この遷移振幅を力学の最小作用の原理と上手く関連付けて

$$\psi(\boldsymbol{x}_b,t_b;\boldsymbol{x}_a,t_a)=\sum_{\boldsymbol{x}(t)} e^{\frac{i}{\hbar}S[\boldsymbol{x}(t)]} \tag{1}$$

のように表す．ここで，$S[\boldsymbol{x}(t)]$ は関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対して実数を定める作用関数と呼ばれる汎関数

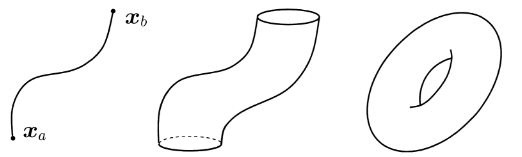


図1　質点の経路から，弦，リーマン面へ．

であり，和は $\boldsymbol{x}(t_a) = \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}(t_b) = \boldsymbol{x}_b$ を満たすすべての（可微分）写像全体に関して取る．ここに現れるすべての写像に関して和を取る，あるいは積分する，という表示が**経路積分**と呼ばれるものである．最小作用の原理によると，質点の運動 $\boldsymbol{x}(t)$ は作用関数 $S[\boldsymbol{x}(t)]$ を最小（あるいは極値）にする関数 $\boldsymbol{x}(t)$ として特徴付けられる．条件 $\boldsymbol{x}(t_a) = \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}(t_b) = \boldsymbol{x}_b$ を満たすそのような極値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は，ニュートンの運動方程式の解であることが示される．オイラーの公式 $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$ からも分かるように，$\hbar \to 0$ の極限では，(1) 式の各項は激しく振動し，和を取るとほとんどが正負打ち消し合い，結果極値を与える $\boldsymbol{x}(t)$ からの寄与が残り，ニュートンの運動法則が再現される．

ファインマンの経路積分 (1) は，その定義に多くの問題を抱えるが，量子力学に現れる遷移確率とニュートンの運動法則との関係を実に簡明に表している．量子力学を越えて，ゲージ理論などに代表される場の量子論へ移行するとき，経路積分の考え方は現代物理学では不可欠なものとなっている．

3. 経路積分による弦理論

ある作用関数を定めて，すべての関数について和を取るという経路積分の考え方は，その素朴さゆえ，様々な拡張に対して柔軟である．拡張の一例が，弦理論である．円周 S^1 から $\mathbf{R}^n$ への可微分写像を $x^i(\theta)(i = 1, \ldots, n, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と表し，これを $\mathbf{R}^n$ 内の**閉じた弦**と言う．この弦の時間変化（運動）$\boldsymbol{x}(\theta, t)$ を考えるのが弦理論である．その経路積分は (1) に習って

$$\psi(\boldsymbol{x}_b(\theta), t_b; \boldsymbol{x}_a(\theta), t_a) = \sum_{\boldsymbol{x}(\theta,t)} e^{\frac{i}{\hbar} S[\boldsymbol{x}(\theta,t)]} \quad (2)$$

を考える．ここで，質点の作用関数を手掛かりに考え，t_a で $\boldsymbol{x}(\theta, t_a) = \boldsymbol{x}_a(\theta)$, t_b で $\boldsymbol{x}(\theta, t_b) = \boldsymbol{x}_b(\theta)$ を満たす可微分関数 $\boldsymbol{x}(\theta, t)$ について作用関数を次で定義する；

$$S[\boldsymbol{x}(\theta,t)] = \frac{1}{4\pi} \iint d\theta dt \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \right).$$

ここで，重積分は $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [t_a, t_b]$ の範囲で行う．$\boldsymbol{x}(\theta, t)$ が S^1 の座標 θ に依らないとき，作用関数は $\mathbf{R}^n$ 内を自由に運動する質点の作用関数に一致するもので，質点を閉じた弦（$= S^1$）に置き換えていることになっている．

量子論では，しばしば経路積分 (2) を周期的境界条件 $\boldsymbol{x}(\theta, t_a) = \boldsymbol{x}(\theta, t_b)$ の下で考え，**分配和**と呼ぶ．周期的境界条件を考えると，関数 $\boldsymbol{x}(\theta, t)$ をトーラス上の関数と思うことができて，ここにリーマン面が登場する（図 1）．

さて，上の $S[\boldsymbol{x}(\theta, t)]$ は座標変換に関する共変性を持たないことに気付かれる．実際，次のように一般化すると一般のリーマン面に対する弦理論が定義される：Σ_g を種数 g の閉曲面とし，その上のリーマン計量を h_{ab} と表す．曲面の局所座標を θ^1, θ^2 として，可微分写像 $\Sigma_g \to \mathbf{R}^n$ を $x^i(\theta^1, \theta^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ と表すとき，共変な形は

$$S[\boldsymbol{x}(\theta^1, \theta^2)] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_g} \sqrt{h} \sum_{a,b,i,j} h^{ab} G_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^a} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^b}$$

と表される．ここで，$(h^{ab}) = (h_{ab})^{-1}, h = \det(h_{ab})$ であり，また G_{ij} は $\mathbf{R}^n$ 計量を表す．

トーラスから一般のリーマン面 Σ_g への拡張は，閉じた弦（ループ）が時間経過の過程でいくつかのループに分かれる相互作用を取り入れることとして解釈される（図 2）．弦理論では，この相互作用の形状をすべて考えることが考えられ，結果，分配和として h_{ab} に関する経路積分を加えた

$$Z(G_{ij}) = \int Dh_{ab} Dx^1 \ldots Dx^n e^{\frac{i}{\hbar} S[x^i(\theta), h_{a,b}, G_{ij}]}$$

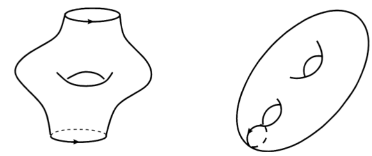


図2　弦の相互作用．

が理論構築の出発点になる．計量に関する経路積分は，可微分写像の足し上げ以上に定式化が複雑であるが，結果として次の事柄が知られている：1) リーマン面の計量 h_{ab} の変形は，共形変換と座標変換を除くと複素構造と呼ばれる有限個のパラメータで表現できる．上の作用関数はこれらの変換の下で不変（共形不変）であるために計量の積分は，複素構造に関する有限個のパラメータに関する積分に還元される．2) 作用関数の共形不変性が，可微分写像に関する経路積分と両立するのは（超弦理論の場合）$n=10$ に限られ，（超）弦理論は 10 次元の時空においてのみ存在する．

物理学では，定義と結論が混在することがしばしば起こる．1) の性質は分配和の形式的な表式から導いた結論の形をしているが，この性質で h_{ab} に関する経路積分を定義するという性質のものである．他方で 2) の性質は，1) との整合性から従う結論である．

このような弦理論は，世に存在する素粒子と呼ばれる物質の基本単位を弦の振動モードであると思い，その相互作用を曲面の計量に関する経路積分によって取り入れるという考え方で 1980 年代にウイッテンによって提唱されたものである．しかし，時空が 10 次元という結論が従うので，10 次元のうち 6 次元部分をコンパクトな多様体 X として直積 $\mathbf{R}^4 \times X$ に置き換える弦理論のコンパクト化と呼ばれる操作が必要になる．この際，多様体 X はリッチ曲率がゼロに等しいケーラー多様体（カラビ・ヤウ多様体）であることが要請され，こうしてリーマン面とカラビ・ヤウ多様体という 2 つの異なる幾何学が弦理論というアイデアで交錯することになる．

4. 安定写像とリーマン面

(4-1) ある対象の族に‘良い性質を持った’パラメータが入れられるとき，そのパラメータの表す幾何学を一般にモジュライ空間の幾何学と呼んでいる．h_{ab} の経路積分に関わって現れる有限個のパラメータは，（種数 $g \geq 2$ の曲面の場合）実変数で数えて $6g-6$ 個であることが知られていて，その幾何学はしばしば M_g と表現される．特に，安定性と呼ばれる概念を用いたコンパクト化 $\bar{M}_g$ が構成されていて，その上の積分が明確な定義を持つことが知られている．このようなモジュライ空間を作り方では，対象を少し大きく許して考え，その中で（半）安定性条件を満たすものだけに限定して‘良い性質を持った’幾何学（$\bar{M}_g$）を作り上げる．

弦理論の経路積分は，そもそも定義が明確に与えられていないが，とても大きな対象にわたる‘和’の形式を取っている．もちろん，弦の相互作用を調べるにはこの大きな‘和’を調べる必要があるが，数学の立場から見ると，その中で良いものだけに制限し，特に結果として有限次元の積分理論が得られるような設定を考えれば良い．このような制限のメカニズムは，超対称性と呼ばれるボソンとフェルミオンの間の対称性を導入することによってしばしば可能であることが知られている．これにさらに「位相的場の理論」と呼ばれる構成を取り入れると実際に有限次元の積分理論が得られることが，1992 年にウイッテンによって示されて[4)]，位相的弦理論と呼ばれている．位相的弦理論から得られる有限次元モジュライ空間が，安定写像のモジュライ空間である．

(4-2) 超対称性などのアイデアは割愛することにして，弦理論から安定写像のモジュライ空間が出てくる様子を大まかに見よう．弦理論の経路積分で計量 h_{ab} の積分は複素構造のモジュライ空間 $\bar{M}_g$ 上の有限次元積分と考える．一方，可微分写像 $x^i : \Sigma_g \to \mathbf{R}^4 \times X$ は $\mathbf{R}^4$ 上では定数であるとして実質カラビ・ヤウ多様体 X への写像 $x^i : \Sigma_g \to X$ $(i=1,\ldots,\dim X)$ である場合を考える．可微分写像は‘無数’に可能でありその経路積分は一般に困難である．しかし，Σ_g も X も共に複素多様体であり，正則な局所座標が入る．そこで，Σ_g の正則（局所）座標を z とし X の正則（局所）座標を w^1, w^2, w^3 とするとき，写像 $x^i : \Sigma_g \to X$ がこれらの座標について正則写像であることを要請してみる．正則写像に含ま

れるパラメータの数は X の正則接束 TX の引き戻し $V=x^*TX$ に関するリーマン・ロッホの定理：$\dim_{\mathbf{C}}H^0(\Sigma_g,V)-\dim_{\mathbf{C}}H^1(\Sigma_g,V)=\dim_{\mathbf{C}}X(1-g)+\int_{\Sigma_g}c_1(V)$ から読み取ることができて，とくに有限次元となることが分かる．位相的弦理論は，このような正則写像への制限を場の理論の定式化の枠組みで行うもので，その結果得られる弦理論の経路積分を F_g^X と表す；

$$F_g^X(t)=\int_{M_g}d^{6g-6}m\sum_{x:\Sigma_g\to X:\text{正則}}e^{-t\int_{\Sigma_g}x^*\kappa}. \quad (3)$$

ここで，κ は X のケーラー形式，t はケーラー形式をスケールするパラメータでいずれも（位相的弦理論の）作用積分から得られる．

(4-3) 可微分写像を正則写像に制限すると，それが有限次元になり (3) が実際に計算可能となる例を挙げる．X が複素 1 次元カラビ・ヤウ多様体（すなわちトーラス E）の場合で，10 次元を $\mathbf{R}^8\times E$ と分解する場合である．さらに，リーマン面 Σ_g も同じくトーラス Σ_1 に取るとき，正則写像 $x:\Sigma_1\to E$ が数えられることが分かる．Σ_1 の複素構造 τ を上半平面に取る基本領域 $\mathcal{F}$ と呼ばれる領域から取り，これに対する Σ_1 の複素座標を $z=\theta_1+\theta_2\tau(0\le\theta_1,\theta_2\le 1)$ とし，Σ_1 を複素平面で原点と 2 点 $(1,0),(1,\tau)$ が定める平行四辺形の対辺を同一視して表す．同様に E のほうのトーラスも複素構造 T を固定して平行四辺形で表し，その複素座標を $w=w_1+w_2T(0\le w_1,w_2\le 1)$ とする．このとき可微分写像 $x:\Sigma_1\to E$ が正則であるのは，これが正則関数 $w=f(z)$ で表されるときである．さらに少し考察することによって，「(定数写像でない）正則写像 $w=f(z)$ が存在するのは，Σ_1 の複素構造が $\tau=\frac{a+bT}{c+dT}$, (a,b,c,d は整数かつ $\left|\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right|\neq 0$）と表されるときに限り，また，このとき正則写像は $w=(c+dT)+$（定数）の形をとる」ということが示される．$f(0)=0$ を要請して定数を零に定めるとき，$f(1)=c+dT, f(\tau)=a+bT$ に注意すれば正則写像の下で Σ_1 が E を $\left|\left|\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right|\right|$ 重に覆うことが分かる．反対の向きに覆う写像は数えないで，位相的弦理論の経路積分 (3) は

$$\int_{M_1}\frac{d\tau d\bar\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\sum_{x:hol}e^{-t\int x^*\kappa}=\sum_{p,s>0}\frac{p}{ps}e^{-tps} \quad (4)$$

のように実行できる．ここで，E を表す平行四辺形の面積を 1 とした．定数写像からの寄与を加えると位相的弦理論の経路積分 $F_1^E(t)$ は最終的に

$$F_1^E(t)=-\log\eta(t)$$

となる．$\eta(t)$ はデデキントの η 関数と呼ばれるもので $\eta(t)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n>0}(1-q^n)$ $(q=e^{-t})$ と定義される．

(4-4) 以上から，位相的弦理論の積分が数学的な意味を持つことが予想されるが，(i) 積分の正確な定義を与える，(ii) カラビ・ヤウ多様体 X について $F_g^X(t)$ の具体形を定める，という 2 つの数学的問題に行き着く．(i) の問題は安定写像のモジュライ空間の定義がコンツェヴィッチによって与えられ，別のシンプレクティック幾何学からの擬正則写像を用いた定義と共に，90 年代中頃に解決している．その一方で (ii) の問題は，「複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体が一体どれほど存在するのか」などカラビ・ヤウ多様体の幾何学の問題に深く関わるため，未だに不明な点が多く残されているのが現状である．

X を複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体とするときに，それの 2 次のホモロジー類 $\beta\in H_2(X,\boldsymbol{Z})$ を一つ定める．このとき，安定写像とは二重点と呼ばれる特異点までを許すリーマン面 Σ_g と正則写像 $x:\Sigma_g\to X$ の対で，ある安定性条件を満たすものとして定義され，そのモジュライ空間は

$$\mathcal{M}_g(X,\beta)=\{(\Sigma_g,x)\mid[x(\Sigma_g)]=\beta\}/\sim$$

と表される．ここで，$\sim$ は同型による同一視を表す．位相的弦理論では安定曲線のモジュライ空間 M_g と正則写像 $x:\Sigma_g\to X$ の積分が直積の形で考察されるが，数学的な定義では対 (Σ_g,x) をまとめて考えて安定性の条件が課される．このモジュライ空間の（仮想）次元は以前と同様にリーマン・ロッホの定理から決められて

$$3g-3+\dim_{\mathbf{C}}X(1-g)+\int_\beta c_1(TX)$$

と決められる．カラビ・ヤウ多様体でかつその複

素次元が3次元の場合，常に（仮想）次元が0に等しいことが観察される（$g=1$ に対しては常に0次元となり，実際，上で可算個の正則写像の具体形を求めた）．（仮想）次元が0に等しくても実際にはパラメータが入り，その一方でパラメータの個数に等しい階数の障害束と呼ばれるベクトル束が構成できて，そのオイラー類を用いてモジュライ空間の積分が定義できるというのが，考え方である．仮想次元が0の場合，オイラー類のポアンカレ双対は点の類を表し，モジュライ空間 $\mathcal{M}_g(X,\beta)$ 上の積分はこの点の数を数えることになる．その個数をGromov–Witten不変量と呼び

$$N_g(\beta)=\int_{\mathcal{M}_g(X,\beta)}1$$

と表す．安定写像は一般に自己同型をもち，その位数で割る操作が入るために，'個数' と言っても $N_g(\beta)$ は有理数に値を取る不変量になる．以上をまとめると，結局，位相的弦理論の経路積分は数学的な基礎付けに基づいて

$$F_g^X(t)=\sum_\beta\left(\int_{\mathcal{M}_g(X,\beta)}1\right)e^{-t\int_\beta\kappa}$$

という表式で理解される．ここで，$\beta=0$ は定数写像に対応するが，この部分については幾分正確さを欠く表式であることを断っておく．

5. GW不変量，DT不変量，GV不変量

GW不変量はGromov–Witten不変量，DTはDonaldson–Thomas不変量，GVはGopakumar–Vafa不変量の省略形である．ここで，最後のGV不変量についてはBPS数などとも呼ばれる物理量で，不変量であるかどうか未だ不明な数である．

(5-1) GW不変量 $N_g(\beta)$ は（特異点を許す）リーマン面 Σ_g からカラビ・ヤウ多様体 X への正則写像を '数える' 不変量であったのに対し，DT不変量，GV不変量ともに X の中に含まれる部分多様体としてのリーマン面の個数を '数える' 不変量である．GV不変量 $n_g(\beta)$ は，関係式

$$\sum_{g\geq 0}N_g(\beta)\lambda^{2g-2}$$

$$=\sum_{k|\beta}\sum_{g\geq 0}n_g\left(\frac{\beta}{k}\right)\frac{1}{k}\left(2\sin\frac{k\lambda}{2}\right)^{2g-2}$$

によってGW不変量 $\{N_g(\beta)\}_{g,\beta}$ を読み替えて得られる数 $\{n_g(\beta)\}_{g,\beta}$ である．弦理論に基づく議論からこうして得られる数は整数となることが導かれ，BPS数とも呼ばれている．この関係式を用いて計算される $n_g(\beta)$ が実際に X に含まれるリーマン面の '個数' に一致することが具体例で確かめられているが，数学的な基礎づけに不明な点が多い数である．以下この関係式をGW–GV関係式と呼ぶことにする．GW–GV関係式には2つの事柄が述べられている．一つは，正則写像の**多重被覆**，もう一つは**退化インスタントン**と呼ばれる正則写像によるリーマン面の像の退化である．

正則写像の多重被覆の現象は β を割り切る整数 k に関する和 $\sum_{k|\beta}$ に現れていて，これは既に具体的に計算した(4)式右辺に現れている（$\beta=d[E]$, $n_1(\beta)=1$ と読んで $N(d)=\sum_{k|d}\frac{1}{k}$）．

もう一つの退化インスタントンの解釈を説明するために，簡単のため β を割り切る整数がない場合にGW–GV関係式を書いてみる．$q=e^{i\lambda}$ と表すとき関係式は

$$\sum_{g=0}^{\infty}N_g(\beta)\lambda^{2g-2}=\sum_{h=0}^{g_\beta}n_h(\beta)\frac{q^{1-h}}{(1-q)^{2-2h}}$$

と表される．ここで，g_β はホモロジー類が β であるような X 内に含まれる一般のリーマン面の種数である．この形でGW–GV関係式を見ていると，色々と状況が見えてくる．ホモロジー類を決めると，X 内に含まれるリーマン面の種数 g_β は決まる．にも関わらず左辺には無限の和 $\sum_{g\geq 0}$ が現れている．これは，GW不変量 $N_g(\beta)$ が「X 内に含まれるリーマン面を像とする正則写像 $x:\Sigma_g\to X$」を数え上げているからである．すなわち，X 内に種数 g_β のリーマン面 C_β が含まれているとき，どんな大きな種数 g のリーマン面 Σ_g を考えても，Σ_g が既約であることを要請しないので，$\Sigma_g=\Sigma_{g_\beta}\cup\Sigma_{g-g_\beta}$ であって Σ_{g_β} の像が C_β になり Σ_{g-g_β} が1点につぶれるような正則写像が存在するからである．このような安定写像を退化

表 1　GV 不変量 $n_g(\beta)$ の例（$X=\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^2}(-3)$）.

d	$g=0$	1	2	3	4	5	6
1	3						
2	27	−10					
3	−192	231	−102	15			
4	1695	−4452	5430	−3672	1386	−270	21

インスタントンと呼んでいる．このように左辺では C_β を像とする安定写像を数え上げるのに対し，右辺ではこれを X 内に存在する C_β に対して解釈される物理的な BPS 数 $n_h(\beta)(0 \le h \le g_\beta)$ で表すのが GW–GV 関係式である．β を決めたとき C_β は一般にパラメータを持って現れるので，このパラメータが表す空間のオイラー数がBPS数 $n_{g_\beta}(\beta)$ と考えられている．同様に，パラメータの空間の中で，C_β が特異点を持って現れ，その正規化を行うと $g_\beta - 1$ のリーマン面になる部分が考えられるが，その部分のオイラー数が $n_{g_\beta-1}(\beta)$ と考えられ，以下同様にして決まる整数値がBPS数 $n_h(\beta)(0 \le h \le g_\beta)$ であろうと予想されている．さらに議論を進めた提案もなされているが[5]，$n_h(\beta)$ を GW 不変量と独立に定義することには未解決な点が多い．

(5-2) GW–GV 関係式に現れる q の有理式が

$$\frac{q^{1-h}}{(1-q)^{2-2h}} = \sum_{n\ge 0} \chi(\mathrm{Sym}^n C) q^{n+1-h}$$

という具合に，非特異な種数 h リーマン面 C の対称積 $\mathrm{Sym}^n C$ のオイラー数に関する母関数であることを思うと[6]，DT 不変量との関係が示唆される．$n_g(\beta)$ を直接扱わないで，類似の数学的に扱い易い不変量で置き換えようという考えから，最初に定義されたのがDT 不変量である．DT 不変量ではカラビ・ヤウ多様体 X の中に存在するリーマン面を代数的に扱い，特にイデアル層 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ のモジュライ空間 $I_n(X,\beta)$:

$$\{\mathcal{I} \mid \chi(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = n, [\mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})] = \beta\}$$

を考える．$\mathcal{M}(X,\beta)$ から GW 不変量 $N_g(\beta)$ が定義されたのと同じように，$I_n(X,\beta)$ から DT 不変量 $DT_n(\beta)$ が定義される．β に対して定まる g_β を用いて，リーマン・ロッホの定理は $\chi(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = 1 - g_\beta + N$ と書かれるので，イデアル層 $\mathcal{I}$ は X 内のリーマン面 C_β と同時に $N(= n - 1 + g_\beta)$ 個の点を定めている．ここに現れる N 個の点は C_β 上に必ずしも乗っているとは限らないが，N 個の点が C_β 上に乗る条件を課しても不変量が構成できることが知られていて，これを $DT'_n(\beta)$ と表す．

定義からこの不変量 $DT'_n(\beta)$ は $n_h(\beta)$ にとても近いことが感じられるが，β を割り切る整数が存在しないとき，具体的に

$$\sum_n DT'_n(\beta)(-q)^n = \sum_{h=0}^{g_\beta} n_h(\beta) \frac{q^{1-h}}{(1-q)^{2-2h}}$$

の関係があると予想されている．

近年，DT$'$ 不変量の一般的性質の解明が大きく進んでいる[7]が，本解説の範囲を越えるので読者の意欲に委ねることとしたい．

6. おわりに

経路積分という未定義であるが素朴で直感的な形式に基づく弦理論の考察から，リーマン面が自然に現れ，さらに多様体の不変量に至る様子を解説した．登場するアイデアはどれも最初は未定義であるが，問題は最終的に‘良い’定義に至るかどうかであろう．経路積分は‘和’がとても大きい分，ゲージ理論などの対称性と相性が良く，今後も‘良い’アイデアの源泉となるであろう．

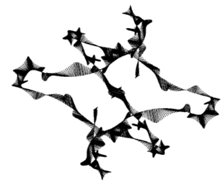
参考文献

1) 村瀬元彦，Witten–Kontsevich 理論の思いがけない新展開，「数理科学」2009 年 9 月号.
2) R.P. Feynman, A.R. Hibbs,『量子力学と経路積分』，(北原和夫訳)，みすず書房，1995.
3) 朝永振一郎，『量子力学 I』，みすず書房 (1969).
4) E. Witten, *Mirror manifolds and topological field theory*, in Essays on mirror manifolds, IP (1992).
5) S. Hosono, M.-H. Saito and A. Takahashi, Relative Lefschetz action and BPS state counting, *International Math. Res. Notices*, **15** (2001), 783–816.
6) T. Kawai and K. Yoshioka, String partition functions and infinite products, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **4**, 397–485, 2000.
7) R. Pandharipande, R.P. Thomas, Stable pairs and BPS invariants, *J. Amer. Math. Soc.* **23** (2010), 267–297 (およびこの論文の引用文献).

（ほその・しのぶ，東京大学大学院数理科学研究科）

特集／曲面の不思議

"Progress in Surface Theory" オーバーボルファッハ研究集会



宮岡 礼子

■ 1. オーバーボルファッハ数学研究所 ■

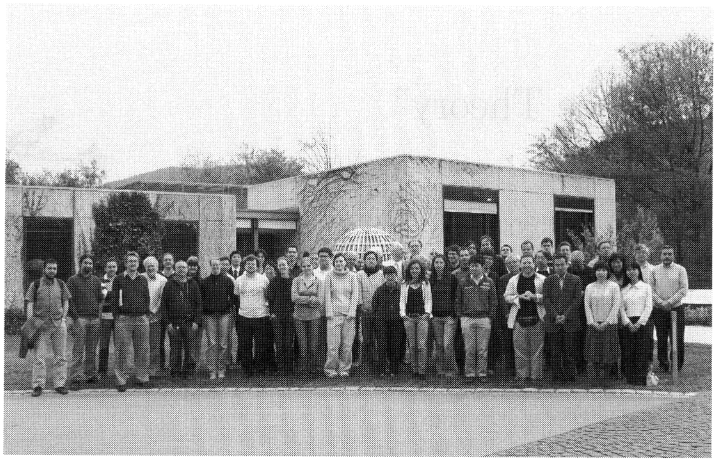
2010年5月2日から8日までドイツのオーバーボルファッハ数学研究所（MFO）において，U. Abresch (Bochum), J. Dorfmeister (TU. München), 梅原雅顕（阪大）の主催による "Progress in Surface Theory" と題した研究集会が開催された．世界各地から曲面論の研究者57名が一同に会し，寝食を共にして26の講演と，可視化のプレゼンテーション，そしてポスターセッションを楽しんだ．この報告では，曲面論の最先端を垣間見ながら，こうした研究所（Paradise of Mathematics と書いた案内があった）の存在の重要性をお伝えしたい．

この研究所はドイツ南部のシュヴァルツバルトと呼ばれる美しい森の中にあり，1944年に設立されて以来，Volkswagen, Siemens, Springer などの企業の支援，寄付を得て運営がなされている．1年中毎週，厳しい競争の中から採択された1～2つの研究グループが1週間泊まり込みで研究会を行い，その間の宿泊費，食費はすべてサポートされる．美しい風景，快適な居室，おいしい（ドイツでは珍しく）食事，お茶とケーキ，夜のワインとチーズとフルーツ（これは実費）とブンダバーな経験ができる．日本では無理かなあと嘆く前に，よく見ると Siemens によるサポート期間は 2008–2013 というようになっている．こんな風に期間を区切って多くの企業のサポートが受け続けられれば，日本でも可能かもしれない．MFO のホームページに次の文章を見つけた．Allianz, Daimler, Lufthansa, Linde, TUI などの企業の言葉として，「数学は至る所にあり，それなしで経済は成り立たない．数学なしで企業管理を行うことは，物理なしで宇宙旅行するようなものだ」．

■ 2. 研究会の様子 ■

初日は著者の講演からスタートし，等径超曲面の分類に関する結果を報告し，後の講演をリラックスして聴くことができた．曲面論のメッカとも言えるグラナダからは9名の参加者があり，そのトップバッターとして，F. Martin が極小曲面に関する Calabi–Yau 予想「$\mathbb{R}^3$ の有界領域（または半空間内）に完備極小曲面は存在しない」について語った．極小曲面については，本誌の「極小曲面と変分問題」を参照していただきたい．曲面が完備であるとは，直感的にはその曲面上の道をたどってどの方向へも限りなく歩けるということなので，そんな曲面が有界な，例えば半径 R の球の内部にあるなどということはあり得ないというのが Calabi–Yau 予想なのだが，反例，つまり，そういう曲面があることが Jorge, Xavier, Nadirashvili らにより示された．構成にはラビリンス（迷路）を用いて有界領域にはめこまれた極小円板に「ひげ」をたくさん生やすことで領域を有界に保ったまま完備化をはかる．さすがに，曲面は複雑に交叉しまくり，自分自身と交わらないようには作れないことを Colding–Minicozzi が示している．

F. Burstall は自分の研究をアンファッショナブル幾何と呼びながら，可積分系理論や調和写像論などの現代幾何の重要な結果を導いているが，今回は Demoulin が1911年に考えたという Ω 曲面の話をした．リーの球幾何学が背景にあり，平坦フロント（後出）の概念



研究集会での集合写真(Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach).

もそこで論じられた.

この研究所での1週間は，30年ほど前に参加したときと同様，朝食以外，食事の度に席がランダムに入れ替わるように仕組まれていて，いやでも1週間の間にすべての人と話をし，情報を交換し合うことになる．午後の休憩時間は図書室で静かに研究をしてもよし，またそちらこちらで討論するグループに加わって自由に語り合うもよしというようになっている.

午後の講演は4時からで，いつも何となく笑いを誘うF. Pacardで始まった．ディリクレ条件とノイマン条件を与えた調和写像方程式の解の存在領域に関する研究成果が述べられ，共形不変性の使えない高次元への拡張が未解決問題として挙げられた．U. Pinkallは，厚紙で作った幅5センチ，長さ1メートルくらいの「ひも」を片手に，メビウスの帯を作ったり，8の字を作ったりの実演を交え，弾性曲線の安定な形状について語った.

2日目は大仁田義裕による複素2次超曲面内のラグランジアン極小部分多様体の安定性の話から始まり，M. KillianのS^1作用で不変なCMC（平均曲率が0でない一定）曲面から作る首飾りの話に続いた．M. Guestは複素射影直線の量子コホモロジーから決まる正則1次形式をポテンシャルにもつ曲面をDPW法と呼ばれる手法で構成することにより，tt* 融合，ミラー対称性，フロベニウス多様体，Hodge構造の変形理論などを含む先端研究の紹介をした．tt* はtopology, anti-topologyの略であるが，物理学者の意味する所は正則–反正則の意味であり，それは調和写像，多重調和写像を含む概念である．Cecotti–Vafaの結果と予想を曲面論の言葉で書き直すことで理解するという興味深い講演であった（東北大学の春の学校，2010年3月でも紹介されている).

この日は7つの講演があるハードな1日で，午後はB. Danielの3次元可解リー群内のCMC曲面の話から始まった．3次元等質空間の曲面論はThurston幾何との関わりで盛んになっているが，他の5つのケースと異なり，可解リー群での考察は特殊であり難しい（が，日本でも井ノ口順一らが深い結果を出している）．他方，F. Peditは3次元ユークリッド空間内の曲面論のサーベイとして，種数g，穴がk個の完備CMC曲面を，埋め込みとはめ込みの場合に分けて分類表で示し，Korevaar–Kusner–Solomon, Grosse-Brauckmann–Kusner–Sullivanの論文を引用した．業界ではKKS, GKSで通じるらしい．最後に藤森祥一は，日本で始まった特異点付き曲面論（本誌「特異点をもつ曲面の幾何学」参照）の成果として，ローレンツ，ミンコフスキー空間内の極大曲面をグラフィックを交えて紹介した.

夕食を挟んで8時から，E. Kuwertにより曲面の種数を無限にするときのWillmore汎関数の下限が8πであるという定理と，種数について単調であるというPinkall–Kühnelの予想が述べられたが，2日目は時差の関係で夜の講演をきくのは大変辛かった.

3日目は午後に遠足と，夜は可視化のビデオを見るというしばし気分転換のスケジュールであったが，天候不順（研究会終了までずっと雨という研究会日和で

あった）で遠足は中止となったため，久しぶりに会ったH. KarcherとFKM型等径超曲面などの話をじっくりして過ごした．

朝は，A. Rosの3重周期をもつ極小曲面の話から始まり，全曲率による分類，非有向極小曲面の話，また$\mathbb{R}^2\times S^1$, $T^2\times\mathbb{R}$, T^3などの曲面，つまり平行移動やスクリューモーションで不変な極小曲面についての興味深い結果が紹介された．A. Rosは大物にしては控えめな印象の数学者である．L. Hauswirthも3次元等質空間の極小曲面論について講演した．A. MaritnezはH^3の中の特異点付き平坦曲面の話をし，未解決問題として，孤立特異点をもつコンパクト平坦曲面が存在するか，エンドが一つで3点以上の孤立特異点をもつ例，またエンドが2つ以上の例が存在するかを挙げた．

夜はH. Karcher, R. Palais, U. Pinkallによる可視化の講演があり，立体視眼鏡が配られて，複雑な図形の中身が立体的に透けて見える曲面の点表示画像をたくさん見ることができた．教育関係者や，一般の人々への啓蒙に実際に使われているようで，KarcherとPalaisの開発した3D-XplorMathのプレゼンテーションと，ベルリングループのビデオ画像を楽しんだ（が9時までは辛かった）．KarcherとPalaisは本当に元気だ！

4日目は小林真平の講演から始まり，従来難解であまり研究されていないH^3の絶対値が1より小さいCMC曲面の話が，ループ群の分解を用いるDPW法により紹介され，多くの質問と議論が集中した．続いてI. Khemarによる等質幾何における楕円型方程式系の話があり，双曲型との違いや，3-対称空間への調和写像などが議論された．P. Miraは曲面上の幾何学的コーシー問題と題して，Bjorlingの問題から始まり，H^3のCMC-1曲面，平坦曲面，$\mathbb{R}^3$の$K>0$一定曲面，S^3の平坦曲面に関わる種々の方程式を論じた．また平坦フロントの議論では特異点の個数が0, 2の場合を特定し（1は存在しない），3つ以上の場合に何が起こるかとの問題が挙げられた．さらにS^3の平坦トーラスに関わる北川義久の分類結果及び，非有向なものは存在しないという結果にも言及した．

午後はC. Breinerのエンドが一つの完備極小曲面の話から始まった．M. Ritoreはsub-Riemannian空間内のCMC曲面が主題であった．最後は小磯深幸によるCMC曲面の安定性と分岐の話で，幾何学では未だ扱われていない分岐後の解の安定性について手がかりを得たという話があり，関心を誘っていた．

ポスターセッションではポスターの他に参加者の著書や論文も並べられ，会期中自由に論議がなされた．日本人では，劔持勝衛（東北大），川上裕（九大），大森俊明（東北大），本田淳史（東工大），直川耕祐（大阪大）の成果が展示され，木曜の晩はワイン片手に熱心な議論があったようだが，著者は眠くて寝てしまい，残念であった．

最終日は山田光太郎の講演から始まり，フロントを多様体の間の写像から自然に決まる連接接束として特徴付ける一般論を述べた後，曲面に特化して，特異点を許すガウス・ボンネの定理などの興味深い結果が述べられた．I. Taimanovは変換の幾何とスペクトル曲線について話したが，講演中数分おきにSkypeの着信がピョコピョコ表示されて爆笑を誘っていた．K. LeschkeはDarboux変換とTerng–Uhlenbeckのsimple dressingのなじみある話であった．

午後のP. Romonは，可積分系理論の基礎とも言えるNoetherの定理の果たす役割を曲面論に適用して明快に語った．最後の講演者R. Kusnerはどの講演にも質問を発し，活発な議論を促していた．講演はリーマン面上の射影構造のモデュライと，$\mathbb{R}^3$のCMC曲面の話であった．そういえばW. Meeksが参加していたのに講演はせず残念であった．彼もいい人だ．

■ 3. まとめ ■

3次元等質空間の曲面論，特にHopf微分の一般化に関する議論が目立ったのはAbreschの影響であろう．またWillmore予想やCosta, Wente曲面の発見に端を発する可積分系理論と関連した研究は，DPW理論に発展してDorfmeisterを中心に活発に行われている．佐治–梅原–山田の共同研究から始まった特異点のある曲面論の研究もかなり進展している．フロント（ルジャンドル写像がはめこみになるような曲面）の概念は古く，80年代初めにU. Pinkallによるリー超曲面論で最初に扱われ，アーノルドにより特異点も分類されているが，その精密な解釈とガウス・ボンネの定理の拡張などはよい所をついた特筆に値する研究で，ドイツグループ，グラナダグループとはひと味違った曲面論の最先端を担っている．

（みやおか・れいこ，東北大学大学院理学研究科）

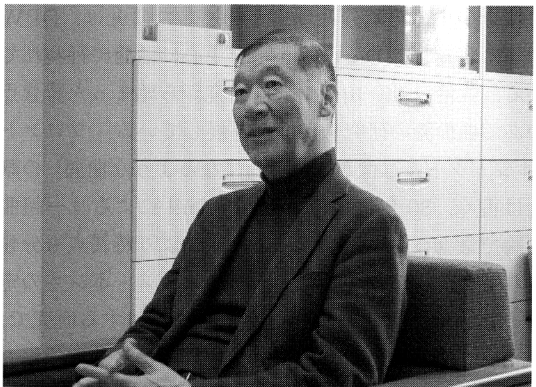
曲面は数学の共通の広場

森田　茂之（聞き手：編集部）

1. 曲面の魅力―その種類と役割

――今回の特集では，様々な曲面が取り上げられておりますが，こうした曲面のもつ性質や曲面が果たす役割，面白さについて，お話をお聞かせいただけますでしょうか．

現代幾何学を大きく分けると，微分幾何学と位相幾何学になるわけですが，近代幾何学が始まったのは偉大な学者と言われるガウスからになると言ってよいでしょう．ガウスは，1777 年に生まれて 1855 年に亡くなったので比較的長生きですが，ほとんどあらゆる分野で第一級の業績を残しております．幾何学における業績は分量的には少ないですが，1827 年に出された“曲面論”というのが，近代幾何学のすべての源泉と言えるかと思います．



森田茂之氏.

もちろん，それより前のオイラーやさらにはギリシア時代にまで遡ることができるわけですが，現代幾何学のすべての源泉と言えるものはガウスからで，とくに微分幾何的な，いわゆる“ガウス曲率”という曲がり具合を実数で表すことを見出したことが大きいと思います．

それからちょっと後に，リーマンが，1854 年のゲッチンゲン大学の有名な就職講演「幾何学の基礎をなす仮説について」の中で，我々が“多様体”と言っているものとリーマン計量の概念を提示しました．これにより“リーマン幾何学”が生まれたと言われています．リーマンは，1826 年，つまり“曲面論”が出される 1 年前に生まれているわけですが，ガウスと違って 40 歳になる前の 39 歳で亡くなっているんですね．惜しいことです．

一方で，位相幾何学というとポアンカレになりますが，生まれた年を見ると，リーマンが就職講演をした年ですから，ガウスと並んでこの 3 人は非常に因縁が深いと思います．ポアンカレも守備範囲が非常に広いのですが，“ホモロジー論”，“基本群”という現代位相幾何学の二本の大きな柱は，両方ともポアンカレの創始によるものです．

また，“ガウス・ボンネの定理”というものがあって，これはガウス曲率とオイラー数の関係が美しい等式で表されます．“ガウス曲率”とは，上

に述べたように曲面の曲がり具合を表す概念です．一方，“オイラー数”は，位相空間のもつある種の構造を特徴付ける位相不変量の一つで曲面の曲がり具合とは関係がないように思われます．曲面を三角形に分割して，三角形の数と辺の数と点の数を，順に足して引いて足すと，不思議なことに分割の仕方によらない数が出てきますが，これがオイラー数です．この一見関係がなさそうなガウス曲率とオイラー数が等式で表されるわけですから，この定理は現代幾何学において，基本中の基本と言えるのではないでしょうか．

その後，微分幾何的なものと位相幾何的なものと，20世紀中盤からそれぞれに分かれて，各々の役割があったわけですけれども，元々は切っても切れないものだったんですね．

最初に位相幾何的なことを言ったのはオイラーですが，オイラーが言ったのは，図形の組合せ的な性質について言っていたわけで，ガウス・ボンネの定理が頭にあったとは考えにくいです．ガウスの場合は，もちろん本人がオイラー数の本質を知っていたからこそガウス・ボンネの定理を出せたのだと思うのですが….

ガウスがすごいのは，微分積分学を使って，それを具体的に曲がった空間に適用していったところですね．微分積分学は，まずはユークリッド空間の平らな空間で展開されるもので，この学問自体，長い歴史がありますが，ガウスによって曲がった曲面に適用されたことで，その系譜が，リーマン以後，現代に至るまで連綿と続いてきたことは重要なことです．

それで，我々は近年，ポアンカレ予想の解決で大きな進展のあった3次元，永遠の謎とも言われる4次元，さらに5次元，6次元，…，そして例えば弦理論では10次元とか，そういった様々な次元の図形を扱っているわけですが，あえて言えばすべての基本は2次元の曲面に帰着すると思います．ですので，曲面の果たす役割といったら，計り知れないものだと思いますね．

また，もう一つは複素解析的な話では，“リーマン面”という概念が関係してきます．これは，複素数の世界が舞台になって，複素数平面（ガウス平面）が基本ですが，実ではやはり2次元の世界になります．先ほどの話に続けると，微分幾何的，位相幾何的，に加えて，複素解析的，といったすべての側面が同じ曲面上で展開されることになります．

――やはり複素数で考えるとわかりやすくなるのでしょうか．

そうですね．幾何学的な構造が緻密になると理論も緻密になって，深い定理になる面もあります．その大きな理由は，複素解析的には正則の概念があって，これは“実”の微分を考えるよりずっと条件が強いんですね．べき級数展開やテイラー展開なども，“実”でやるとわからないことが，複素解析的にすると簡単になる面もあって，きれいになります．そういった意味で理論がすっきりします．いわば神の世界と言ったらいいでしょうか．

それに較べて，“実”の世界というのは，人間的というか泥臭い面もあるわけですが，これらはどちらがよいというわけではなく，両方を行ったり来たりする，そういうことができるというのが，実2次元（複素1次元）の世界の非常に柔軟かつ豊穣な性質を表していると思います．

一方で，複素2次元になると，実4次元の世界と行ったり来たりもしますが，離れていく面もあって，例えばフリードマンやキャッソンといった人たちによる，“ワイルド・トポロジー”と呼ばれる側面をもつ仕事としてなされています．

こうして見ると，実2次元と複素1次元の世界にはそうした乖離がありませんから，いろいろな数学理論――複素解析的，微分幾何的，位相幾何的，あるいは代数幾何的なすべての話――がある意味で共通の言葉・土台で話し合えます．

私はずっと曲面を主に研究をしていますが，この分野は理想郷だと思っています．例えば，小学校を出て，大きくなってから，いろいろな仕事に

就くとなかなか当時の同級生とは会えないですが，同窓会などで会うと，昔同じ時間を共有したことを思い出して懐かしいですよね．それと同じように，いろいろな専門に分かれてきた分野の数学が，まさに共通に集える場所と言えます．そういう役割があって，いろんな見方をしていけるという面白さが曲面にはあると思います．

小学校では円，中学校では楕円，放物線，双曲線と出てきますが，面白いことに，数学ではどんな分野も大きく分けて，この楕円的，放物的，双曲的な世界の3つになるんですね．曲率について言うと，1次元の場合にはなかった区別が2次元の場合には現れて，曲面の曲がり具合が楕円的なもの，放物的なもの，双曲的なもの，と分けられていきます．

こうして，曲面すなわち2次元の世界で曲がり具合の多様性がすべて完全に実現できるわけです．これが，3次元，4次元になるともっと複雑になるかと言うと，リーマン幾何学というのは，次元が高くなってもリーマン計量によって基本は2次元のもので表されますから，そういった意味では曲面の世界に帰着します．

将来リーマンを超える天才が現れるならば，真に高次元の幾何学が出る可能性があるかもしれませんが，今のところは，少なくともリーマン幾何学は2次元がすべての基本になります．

2. コンピュータの役割——メリットとデメリット

——最近ではコンピュータの発達に伴って，計算結果や現象を表す曲面を可視化することが簡単になってきたかと思います．こうしたことは研究を進める上でどれくらい役に立つでしょうか．

それはものすごく役に立ちます．例えば，ウェブ上で“リーマン面”について検索すると，リーマン面の例のグラフィックスを見ることができます．こうした図をリーマンは当時見ることはできなかったけれども，頭の中には描いていたのではないかと思います．

今はいろいろなソフトがあって複雑な計算なども，学生さんでもちょっと勉強すれば，こういった図を描くことができます．また，実験もできますので，パラメータも変えたらどう変わるかも分かります．可視化によってイメージできるというインパクトは，ものすごいことです．

ところで，先ほども話に出たガウス曲率をガウスが発見したときは膨大な量の計算をしたそうです．もし，ガウスが数式処理ソフトを持っていたらどんなことになっていたか，想像するだけで楽しいですよね．

あと，余談になりますが，論文を書くときもコンピュータはとても役に立っています．私が研究者になった頃は，手書きが主で，教授の先生たちは手書きのものを秘書室にもっていくとタイプライターで打ってもらっていましたが，私が助手になった頃，電動のタイプライターが出て，その後，ワープロが登場し，そしてあれよあれよという間に TeX で書き始めるようになりました．

論文の執筆だけでなく，計算したり，図を描く上でのコンピュータの影響や発展というのは，指数関数的に上がってきていて，科学の諸分野で時間の節約がとにかくできるようになりました．手計算をやっているとくたびれてきてしまいますが，コンピュータにやらせていれば，その間は別の仕事に打ち込めます．

また，図の作成に際しても，今はほとんどの図をコンピュータで作成することができますが，昔は少しプロットして概形を描いていました．

このように数式処理や数値計算だけでなく，論文の執筆，図の作成にもコンピュータの影響というのは，非常に大きいと思います．

ただこれはちょっと注意したいことですが，こうしたことにのめり込みすぎると本質を見失う可能性がありますし，計算のための計算になってしまったり，またデータをとるだけになってしまってちょっと安易になってしまう，そういう恐れが

あります．逆にうまく利用すれば，時間の節約になったり，可視化できますからイメージを膨らませる上でも利点があるのですが，ある部分では，純粋数学にとってコンピュータがすべて良いというわけではないと思います．

私はコンピュータを数式処理に主として使っていますが，データを入れることで結果が様々に違ってきますので，実験をしているようでとても面白くなります．しかし，長くコンピュータで処理をしていると，コンピュータ自身が疲れてくるのか，時として同じ答えが出てこないときもあったり，不思議なことも出てきます．

最後には人間の頭脳が頼りになるのではないでしょうか．

3. 影響を受けたこと

——先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせ下さい．

小さいときからずっと数学が一番好きで，また，理科や物理も好きでしたので，そうした方面に進みたいと思っていました．私の生まれは昭和21年で終戦直後ですが，幼少だったこともありますが，それほど当時の困難な時代の影響はあまり受けませんでした．その後，時代は高度経済成長を迎えて，その頃はエンジニアになるのが理系では一般的な夢でしたが，私も漠然とそんなことを考えていました．

大学に入って数学科に行くようになってからも，ちょうど東大紛争があったり，授業もほとんどないような状況でしたので，卒業したのも5月でした．そういう経緯もあって，完全に研究者を意識したのは大学院に入ってからでしたね．院に入ってからは，トポロジーという分野を勉強し始めたときに，トムという偉い数学者が「トポロジーは死んだ」と言うんですね．これから自分は始めようというのに（笑）．当時，三角形分割や基本予想という大問題があったのですが，1969年にカービーとシーベンマンによって解かれたことで，いわば微分トポロジーの黄金時代はそこで終わったと言われました．しかし，後から考えてみると一つの区切りであっただけで，終わったわけではなかったんです．

それでどうしようかと思っていたところに，デニス・サリバンという人のプリンストン時代の博士論文やMITのレクチャーノートなどに影響を受けて，トポロジーの世界に入っていきました．修士を出て助手になってしばらく経った1973年に，国際研究集会があっていろいろ話をしたり，サリバン本人の講演を聴いたり，東京で研究集会が終わった後，一緒に東北大に行ったり，そこからまた東京を経由して京都にいくときも，新幹線でずっと一対一でいろいろ教えてもらって，そのときのノートは今でも大切に宝物としてしまってあります．

欧米で発表された論文は，その当時は今みたいに，書いたらすぐにネットで入手できるような時代ではありませんでしたから，後で先生や先輩を通して入ってきて，それをコピーするのも大変だったのですが，青焼きのようなものを乾かして，そういうものを読んでいました．そうしたことが一番影響を受けたこととして思い出されます．

もちろん日本国内でも影響を受けた先輩や恩のある先生はいますが，とくに服部晶夫先生，田村一郎先生には直接に恩顧を受けました．

4. メッセージ

——今後，研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします．

そうですね．昔から言われていますが，若いということは，何にも代え難いものです．とくに大事にしてもらいたいのは，まず動機付けですね．これを勉強して研究したいというモチベーションです．そして志と夢をもって，それを実行に移す情熱をもつ，ということだと思います．

小さい頃からいろいろな段階で夢をもつことは大事なことですが，研究者を目指すということになると，それは誰でもできますが，ただ夢をもっているだけというわけにはいきません．職を得て食べていくには，独りよがりにはいきませんから，社会的な責任というものも出てきます．

しかし，まず学生のときは自分の夢を大事にして，それを実現するためには何が何でも頑張っていくんだ，という心意気が大事です．その戦略として，私はよく山登りに譬えるんですが，まず“登るという過程”が大切ですよね．当然，登った後の景色を眺めるのも集大成の結果として大事ですが，そこへ至る過程が，生きるという行為でもあり大事なことです．そうすると，登山の過程ではベースキャンプが必要ですから，それに必要な食料というか，いわば基礎的な学力を身につけるために，例えば基本的な教科書をどの頁も分からないことがないようにとにかく読み込むなど，ベースキャンプに必要なものを蓄えていくことが大切になります．

だけど，それだけでは勉強というのは地味なことですし，モチベーションは上がってきませんよね．それと並行して，絶えず開かれた目で，本誌などの雑誌やインターネットなど，いろいろな広い分野の情報を吸収していくことが大事です．そして，それをいったん吸収した後で，その中で何が自分にとって大事なのかをよく考えることが大切です．それがないと，先端のキーワードを見るばかりで，アイデンティティを無くしてしまいます．

なかなか難しいのですが，自分の中に何か一つベースになるものがあったら，それを先端のキーワードと結びつけようと努力をしていくと，だんだん両方が活きて来るんですね．そうなると，先ほどの登山の話ではないですが，気が付くと「こんな所まで登って来たか」と，まだ中腹かもしれないけれど，少しずつ登ったなという実感が湧いてきます．そうすると，基本的なことだけどベーシックなものを新たにもう一つやろうというモチベーションと，さらに高みを目指そうというモチベーションが出てきます．この“基本”と“開かれた目”を連携する形でもっていくことで，将来，本当の意味でのプロになるという研究者の資質が備わってくるのだと思います．

人生挫折の繰り返しですから，登っていって，登るつもりだったのに行けなくなることのほうが多いと思うんですね．しかしそこがチャンスなわけです．とりあえず登るのはおいといて，ちょっとベースキャンプをおいて，そこで周辺などを探検していく．もしかすると，そっちがどんどん面白くなっていくかもしれない．最初に登った所とは全然違うところに登っていったとしても，それでいいんですよ．大事なことは挫折の繰り返しだけれど，諦めないで次なる道を探していくこと．少しずつでも登っていくこと．そういうことを続けていくと，後退したり下ったことも多かったけれど，気が付くと「ここまで登ったんだ」と，そういう実感が次への力になるわけです．

こういうことは一人でやるのは難しいですから，仲間が大事です．仲間といっても切磋琢磨できる，いい意味での競争相手が必要です．

それから外国へも積極的に出ていって，国内だけでなく，多くの研究者と話していく．よくコミュニケーションやおしゃべりが苦手だと言う人がいますけど，数学は記号や数式もありますから，これは万国共通です．絵を描いても話せます．それに，食べることや，悲しい，嬉しいという感情表現は，同じ人間ですから通じますよね．

こういった意味で，数学というのは学問の中では，比較的コミュニケーションしやすい分野だと思います．恵まれた学問だと思います．

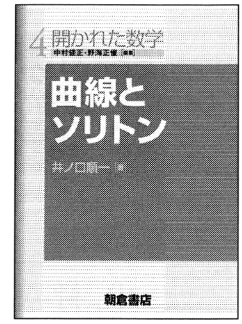
——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2010年3月，東京大学駒場キャンパス研究室にて）

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

曲線とソリトン

井ノ口順一著，A5 判，192 頁，本体 3200 円，朝倉書店



この本は，平面曲線の時間発展を mKdV（modified KdV）方程式などのソリトン方程式によって記述し，その（特殊）解を得ること，解の間の変換を記述することを目的に書かれている．平面曲線の乗っている平面の幾何構造に応じて，対応する方程式が変化することも紹介しているモダンな本である．

曲線や曲面の微分幾何学とソリトン方程式の解構造の理論とが交錯するこの分野は最近では可積分幾何と呼ばれているようである．評者にとって，叙述が易しく計算をフォローできるところや，「深入り」しないところが，小気味よいテンポと相俟って，何より有難い．

この本の内容の概略を記す．

最初の 3 章では，ユークリッド平面上の平面曲線を扱う方法を定めて，平面曲線の弧長，曲率とフレネ標構，平面曲線の接線が x 軸となす角を表す角関数，角関数と曲率，曲線の積分表示などが簡潔過ぎるくらい簡潔に述べられている．第 4 章では，ヤコビの楕円関数の定義と加法定理がまとめられているが，内容は最小に限られ，証明は他書に譲っている．ここまでが準備であるが，初めて平面曲線論を学び，楕円関数に触れるとすると少々きついだろう．引用されている標準教科書の参照が必要のようだ．

第 5 章–第 7 章は平面曲線の時間発展を定義したのち，mKdV 方程式の導入，この方程式の楕円関数解と解に対応する曲線の構成に充てられている．

弧長パラメータ s で表される平面曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の接ベクトル場を $\boldsymbol{T}(s)$，単位長さの法ベクトル場を $\boldsymbol{N}(s)$ とする．これらが時間パラメータ t によって変化するとき，平面曲線の時間発展という．すなわち，曲線 $\boldsymbol{p}(s,t)$，接ベクトル場 $\boldsymbol{T}(s,t)$，法ベクトル場 $\boldsymbol{N}(s,t)$ の 3 つ組に対し，時間発展を記述する微分方程式を $\boldsymbol{p}_t = g\boldsymbol{T} + f\boldsymbol{N}$ と表す．g, f はスカラー関数である．パラメータ s はすべての時刻 t について，弧長パラメータであるとするのが自然であるので，曲率を κ と記すとき，$g_s = \kappa f$ が要請される．特に，$g = -\kappa^2/2$ のときに，この方程式が積分可能であるという条件を書き下ろすと

$$\kappa_t + \kappa_{sss} + (3/2)\kappa^2\kappa_s = 0$$

なる方程式が得られる．これが，この本の主題である mKdV 方程式である．第 6 章で，λ を定数として，$s - \lambda t$ にのみよる解（進行波解）κ を楕円関数を用いて構成すること，第 7 章では，それらの解から曲線の積分表示によって，曲線を具体的に得る方法が示されている．「方程式の図示」が得られたことになり，それらの曲線を眺めるだけでも楽しい．

次に，解の間の変換を説明している．第 8 章では，付録に述べられている曲面の古典的なベックルンド変換をモデルにした，mKdV 方程式のベックルンド変換を定義し，変換を多重回繰り返して得られる多重ソリトン解の構成を与えている．第 9 章は，AKNS 系と呼ばれるれ連立偏微分方程式系の概説，それらに含まれる部分系の解説とダルブー変換の解説，ベックルンド変換の導出に充てられている．集約的な章となっていて，多くの参考文献が挙げられているので，興味のある読者に参考になるだろう．第 10 章では mKdV 方程式の広田の方法による表示を扱っている．

第 11 章からの 4 章は，平面の構造を変えたときには時間発展はどのように捉えられるべきかを簡潔にまとめたものである．扱っている幾何（構造）は等積幾何，相似幾何，メビウス幾何であり，典型的な発展方程式は澤田・小寺方程式，バーガース方程式，複素 KdV 方程式などである．違った幾何構造を繋ぐホップコール変換，ミウラ変換なども解説されている．

以上の概略からわかるように，多岐にわたる事柄を上手に配列している．ただ，“現地調達の書き下ろし方式” なので，文献案内を参考にしながら，それらの参照が必要だろう．

また，（初版第 1 刷には）ミスプリントが少なくない．特に，第 8 章，第 10 章には符号間違いのミスプリントがあるので，要注意である．

これだけの新鮮な内容を簡潔にまとめている点が評者には大変参考になった．著者の目指す “ソリトン方程式と呼ばれる非線形双曲型偏微分方程式と曲線の微分幾何学とをコンパクトな入門書” とする意図は成功している．

佐々木　武（神戸大学名誉教授）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

中村　勝洋

1980年10月号

「乱数」の特集の中で「M系列について」と題した記事を書いてからもう30年も経ってしまったのかと今更ながら驚いている．当時企業の中央研究所にいて，その十数年前から始まったデジタル情報通信技術の研究開発の真っ只中にいた．M系列は代表的な擬似乱数列として様々な場面で応用され，また多くの数学的構造と容易に結びつくことから，多くの数理科学者の興味あるいは研究の対象にもなっていた．この頃，現実の場面で求められる乱数列としては，乗数合同法による数列やM系列などの有限長（周期）系列が，所謂“擬似”乱数列として利用され，一応の用は足せていた．しかし，80年代を迎えた前後あたりから，即ち30年ぐらい前から，我が国でも欧米に倣って学会レベルでの開かれた暗号研究が始まるようになり，この分野特有の解読に耐え得る，より乱数性のきちんと定義された乱数列の生成が要求されるようになってきた．概念的には，特に計算量的観点から（擬似）乱数を，“一様分布から多項式時間では識別できない分布”に従って生成される数と定義したとき，擬似乱数の存在条件が一方向性関数の存在と同等であるといったことなどが導かれたりして，活発な研究の進展を見た[1]．



一方，様々な手法で現実的に構成した乱数列の乱数性の判定に関しては，NIST（米国標準技術局）が定めた乱数検定が最近はdefacto的に広く使われている．NIST乱数検定は，現在15個の検定法，計188個の検定項目からなるが，検定法として幾つかの誤りが指摘されている[2]．一部の検定法の理論的誤りは別として，30年前と違い，この間の目覚しいコンピュータの進展による計算能力の増大が統計的検定の計算誤差を浮き彫りにして発見させてくれた面もある．それは，被検定列があくまでも100万ビット長の“有限長”系列でありながら，理想分布として2項分布の代わりに正規分布，多項分布の代わりに χ^2 分布，あるいは他の無限長系列を想定した理論分布を用いたことによる計算誤差や，理論分布のパラメータ値の近似誤差による計算誤差が，乱数列としての判定に影響を及ぼす点などの検討が十分でなかったためと考えられる．

また一方，最近のコンピュータの乱数生成ルーチンには，何らかの意味で物理的揺らぎを取り入れたルーチンも備えられ始めており，関連研究も進んでいる．

参考文献

1) O. Goldreich, “Modern Cryptology, Probabilistic Proofs and Pseudorandomness”, Springer-Verlag, 1999.
2) 奥富秀俊，中村勝洋，“NIST乱数検定を用いた合理的なランダム性の判定法に関する考察”，電子情報通信学会論文誌A，Vol.**J93-A**, No.1, pp.11–22, Jan. 2010.

（なかむら・かつひろ，千葉大学グランドフェロー）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学
第1回

多様体とダイバージェンス関数

甘利 俊一

連載を始めるにあたって

情報幾何を構想したのは今から30年以上前，私が40歳の声を聞く頃であった．その頃は神経回路網の数理を主に研究していたが，何かこれとは別の可能性を追求し，研究の幅を広げたいと思った．広く，情報の世界に現代幾何学の手法を導入し，これによりほっておけば年とともに特定の分野の「専門家」になりかねない自分に，新しい可能性を見出したいと考えたのである．

幸いこの構想は2年ほどの沈思黙考の末に，形をなし始めた．統計学の理論として始まったが，幸運なことに竹内啓氏の激励，D.R. Cox卿が深い関心を示してロンドンで情報幾何を検討する国際ワークショップを開催したことなどが手伝って，理論は広まっていった．

その後は，何回かの国際ワークショップがあり（今年はドイツ，来年はフランス)，いまもこれは続いている．応用の分野も統計学だけではなくて，脳の理論，画像処理，機械学習，最適化など，工学の最先端を巻き込んで発展している．しかし，適当な入門書が見当らない．統計に関しては何冊かある．岩波の応用数学講座にも書いたが[1)]，何しろ微分幾何をまっとうに使うという筋書きは，工学者からは敬遠される．

若いころはまっとうな数学にあこがれるので，記述もついそちらを向いてしまう．しかし考えてみると，情報幾何の神髄はそんな難しいことを言わなくてもわかる．難しいことを言うのは，一種の美意識で若気の至りでもある．私は70歳をとうに越え，後期高齢者も近づいた今，情報幾何の神髄を極めてやさしく，広い構想で書いてみたくなった．

実はこうした考えは何十年も前からあるにはあったのだが，雑務に悩殺され，

また研究が忙しくてなかなか実らなかった．そこへ沸いたのが，連載の話である．こうすれば，尻に火がついてどうしても書いてしまう．一回ずつうまく話題を切り分け，面白いものにしたいと考えている．さらに欲張って，単行本（日本語版と英語版）も同時にものにしたいと思うが，そうは棚ぼた式に行くかどうかわからない．とにかく出発しよう．この旅路につきあってくれる読者に感謝したい．

1.1 工学に現れる空間：多様体

空間とは，対象（点）の広がりを持った集まりである．その中で，ユークリッド空間に似た多次元の構造のものを多様体（manifold）と言う．n 次元ユークリッド空間は，1 点の周りが n 次元的に広がっている．デカルト座標を導入すれば，ユークリッド空間の各点は，座標として $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ のように n 個の数字（実数）の組で表せる．

n 次元多様体とは，平たく言えば，各点の周り（近傍）を見れば点が n 次元座標 $\boldsymbol{x}$ を用いて表せるような n 次元的な広がりをもった空間のことである．何か，もってまわった言い方が気になるだろう．そう，数学者はこんなことでは満足しない．ハウスドルフ位相がどうのこうのと難しいことをいうがそれは無視して，とりあえず，各点でその周りは n 次元的に広がっている空間ということで，我慢してもらおう*1)．

多様体の例をあげよう．

ユークリッド空間：おなじみの空間である．ここには，例えば正規直交座標系が入る．2 次元ユークリッド空間なら，各点は座標 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ で表せる．座標系はこれ以外にもある．例えば，極座標系である．これだと，各点は，原点からのユークリッド距離 r と偏角 θ を用いて，(r,θ) で表せる（図 1.1）．

2 つの座標系は

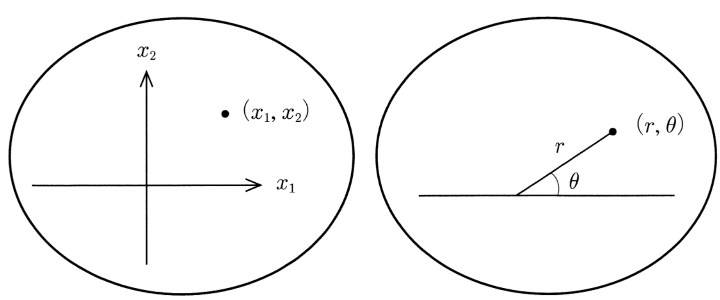


図 1.1 2 次元ユークリッド空間の座標系．左が正規直交座標系，右が極座標系である．

*1)（可微分）多様体 M とは次の条件を満たすハウスドルフ空間である．M 全体が座標近傍と呼ばれる開集合で被覆され，各座標近傍から n 次元ユークリッド空間への同相写像があり，これにより各座標近傍での座標系が写像先のユークリッド空間の座標から定まる．2 つの相交わる座標近傍での座標の変換が可微分同相写像であるとき，これを微分可能多様体と呼ぶ．

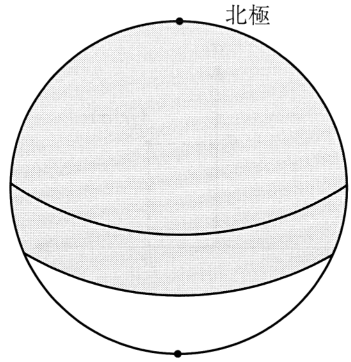


図 1.2　北極を覆う座標近傍.

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad (1.1)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \qquad (1.2)$$

で相互に結ばれている*2).

球面：簡単のため，2 次元球面（3 次元球の表面）を考える．地球の表面を思い浮かべればよい．各点の周りは 2 次元的に広がっている．だから 2 次元多様体である．ただ，表面全体を一つの座標系で表すことはできない．最低 2 つの座標系を考える必要がある．例えば，北半球を覆う座標系（図 1.2）と南半球を覆う座標系を考え，それぞれが赤道を少しはみ出すように取って，そのつなぎ目の区域はどちらの座標系で表してもよい．この領域では，2 つの座標系の間で，滑らかな座標変換ができるようにする．球面は閉じていてコンパクトである．2 次元ユークリッド空間とは位相が違う．でも，1 点，例えば南極をくり抜けば，ユークリッド空間と位相の意味では同じである．長さを測る計量はまだ考えない．これは後のことだ．

多様体の全体を一つの座標系で覆うことができないことがある．このため，一部を覆う座標系を局所座標系と言い，これらがいくつか集まって全体を覆う．しかし，局所といっても，小さいということではない．地球の表面なら，局所座標系としてほとんど全部を覆うものをとれる．これからは，主として，多様体の局所座標系で覆われる範囲を考えることにする．

確率分布族の空間：確率分布を一つの対象とした場合，その集まりは多様体になる．例をあげよう．

1 次元ガウス分布族

x を，平均 μ，分散 σ^2 のガウス分布（正規分布）に従う確率変数としよう．このとき，確率密度関数は

---

*2)　実は極座標は原点 $r=0$ で，特異である．ここでは，θ が何であっても $r=0$ は同じ点を現してしまうから，座標変換 (1.1) のヤコビ行列も，原点では特異となることに注意.

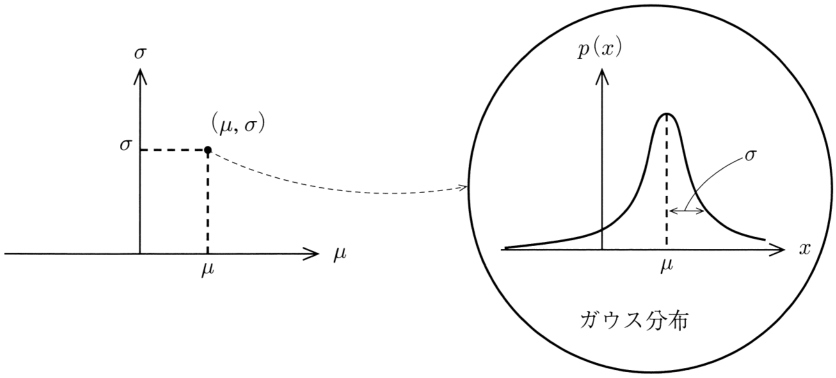


図 1.3　2 次元ガウス分布のつくる空間.

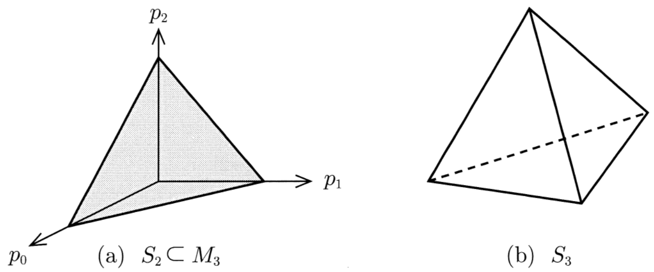


図 1.4　離散分布の空間 S_2 と S_3.

$$p\left(x; \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{1.3}$$

のように書ける．ガウス分布は，平均と分散を与えれば一つ定まるから，その全体は座標系 (μ, σ) を持つ 2 次元多様体となる（図 1.3）．後で見るように，これ以外の座標系もあって，そちらのほうが便利なこともある．

$n+1$ 値をとる離散分布

確率変数 x は離散で，$\{0, 1, \cdots, n\}$ の $n+1$ 個の値をとるとしよう．いま，

$$p_i = \mathrm{Prob}\{x = i\}, \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{1.4}$$

とおけば，一つの確率分布は，ベクトル

$$\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_n) \tag{1.5}$$

で定まる．ただし

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1, \quad p_i > 0 \tag{1.6}$$

の制約が入っている．確率分布の全体を S_n としよう．これを図で表示すれば，n 次元単体（シンプレックス）であって，例えば $n = 2$ ならば，図 1.4 (a) のような正三角形，$n = 3$ なら図 1.4 (b) のような正四面体となる．S_n は n 次元多様体である．

$n+1$ 個の p_i をすべて座標としてとると一つ余計だから，例えば

$$z = (p_1, \cdots, p_n) \tag{1.7}$$

を座標系としてよい．いま，確率変数

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i \end{cases} \tag{1.8}$$

を導入すると，確率分布は，

$$p(x, z) = \sum_{i=1}^{n} z_i \delta_i(x) + p_0 \delta_0(x) \tag{1.9}$$

のように式で書ける．ただし，

$$p_0 = 1 - \sum z_i \tag{1.10}$$

である．

一般の統計モデル：ここで，x を確率変数とし（これはベクトルであってよい），その確率密度関数が，n 次元パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ で指定される $p(x, \boldsymbol{\xi})$ の全体，

$$S = \{p(x, \boldsymbol{\xi})\} \tag{1.11}$$

を考えよう．これは，$\boldsymbol{\xi}$ を座標系とする n 次元多様体と考えてよい (実は，そのためにはパラメータに無駄がないとか，若干の条件がいるが細かいことはとりあえず考えない*3)）．ガウス分布や離散分布の空間も，統計モデルの例である．

正測度空間：確率分布の空間から，束縛条件

$$\sum p_i = 1 \tag{1.12}$$

を取り去れば，p_i の和は 1 にはならない．これは，$n+1$ 個の要素に，それぞれ p_i の正の重みを付けたものの全体である．これは，ユークリッド空間の第一象限（座標値が正の部分）に対応する，$n+1$ 次元多様体である．これを M_{n+1} と書く．離散分布の空間 S_n はその部分空間で，束縛 (1.12) で定まる．図 1.4 (a) は M_3 の中に部分空間として S_2 がある．

画像の空間は正測度空間と見なせる．いま，x-y 平面上の画像を $s(x, y)$ と書く．画面を縦横 n 個ずつに離散化して，画素 (i, j) 上の明度を $s(i, j)$ とすれば，これらは n^2 個の要素の上の正測度と見なせるから，M_{n^2} である．この他，音声のパワースペクトルなども離散化すれば正測度の多様体になる．

行列の空間：n 次元正定値行列を P としよう．これは対称行列である．だから，このような行列を集めた空間は，$n(n+1)/2$ 次元の空間になる．座標系と

*3) 正則統計モデルとは，パラメータで指定される確率分布の集まりで，パラメータの領域がユークリッド空間の開集合と同相で，確率分布がパラメータで微分可能で，Fisher 情報行列が存在して非特異なものを指す．

して，行列の対角線を含めた右上部分を用いることができるが，各座標の値は自由ではなくて，行列の固有値がすべて正という不等式条件が付く．

縮退していない（行列式の値が 0 でない）$n \times n$ 行列の全体は n^2 次元の多様体をなす．この場合，行列の n^2 個の成分を座標と考えてよいが，当然行列式が 0 にならないという制約条件が入る．これは，n^2 次元の多様体である上に，行列の掛け算からなる群の構造が入り，群の演算が多様体上で連続である．このようなものをリー群と呼ぶ．行列の場合は一般線形行列群 $Gl(n)$ と言う．特に，直交行列の全体はその $n(n-1)/2$ 次元の部分多様体であって，これもリー群 $O(n)$ である．

神経回路網の空間：いろいろな対象を集めたものの多くが多様体になる．例えば，相互に結合した n 個のニューロンからなる回路網を考えよう．その構造は，ニューロン間の結合の重みで指定される．例えば，ニューロン i からニューロン j への結合の重みを w_{ji} とする．こうすると，一つの回路網は n^2 個の重み (w_{ji}) で指定されるから，これは n^2 次元の多様体と見なせる．しかし，そこに対称性などの構造を考えていくと，いろいろな束縛が加わったり，また縮退が起こったりして，多様体としていろいろと妙なこともあり得るので，注意を要する*4)．

1.2 多様体上のダイバージェンス関数

これまで多様体として，その位相的な仕組みと座標系のみを議論してきた．ここでは，その計量的な性質として，ダイバージェンスと呼ぶ 2 点の関数を考えよう．多様体 S に（局所）座標系が入っているものとし，その座標をベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ などで表す．多様体の 2 点 P, Q に対して，次の条件を満たす関数 $D[P:Q]$ を P, Q の間のダイバージェンス（分離度）と言う．いま，P, Q の局所座標を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ として，ダイバージェンスを座標の関数として，$D[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}]$ のように書く．D は微分可能とする．

1) $D[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}] \geq 0$.

2) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のとき，このときに限り，$D[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}] = 0$.

3) P 点と Q 点が近いとし，それぞれの座標を，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ とする．このとき，$D[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}]$ をテイラー展開すると，

$$D[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}] = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(\boldsymbol{x})dx_i dx_j \tag{1.13}$$

と 2 次の項が最初に出るが，行列

*4) 多層パーセプトロンなどの階層的神経回路モデルは，中間層のニューロンの巡回不変性から，異なるパラメータを持つパーセプトロンでも動作が同じになるものが存在する．この同値類で空間を割ると，そこに特異点が現れ，厳密な意味での多様体ではなくなる．学習におけるパーセプトロンの収束の遅さなどは，こうした位相的な構造に由来する[2,3]．動作に雑音を導入して統計モデルとして見たパーセプトロンは正則ではなく，特異統計モデルになる[4]．

$$G(\boldsymbol{x}) = (g_{ij}(\boldsymbol{x})) \tag{1.14}$$

は正値対称である．

ダイバージェンスは 2 点の分離の度合いを表すが，これは距離ではない．第一にダイバージェンスは対称でなくてもよい．つまり，一般には

$$D[P:Q] = D[Q:P] \tag{1.15}$$

は成立しない．だから，これを P から Q へのダイバージェンスというように順序を付けて呼ばなければいけない．さらに三角不等式も成立しない．(1.13) から解るように，ダイバージェンスは座標の 2 乗の次元をもっている．だから，これは距離の 2 乗のようなものである．ただし，非対称性に注意．

ここで，$d\boldsymbol{x}$ で表される微小な 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ の間の距離 ds の 2 乗を

$$ds^2 = \sum g_{ij}(\boldsymbol{x}) dx_i dx_j \tag{1.16}$$

で定義することにしよう．すると，ダイバージェンスは微小な距離の 2 乗を，非対称に遠方にまで拡張したものとみなすこともできる．微小線分 $d\boldsymbol{x}$ の長さが (1.16) のような 2 次形式で表される空間をリーマン空間と呼ぶ．

ダイバージェンスの例をいくつかあげる．

1)　ユークリッド空間

距離の 2 乗がダイバージェンスを与える．

$$D[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}] = \frac{1}{2}\sum (x_i - y_i)^2 . \tag{1.17}$$

これはたまたま対称である．

2)　確率分布族空間における Kullback–Leibler ダイバージェンス

2 つの確率分布 $p(x)$ と $q(x)$ のダイバージェンスを

$$D[p(x):q(x)] = \int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx \tag{1.18}$$

と定義したものが，Kullback–Leibler ダイバージェンスである（以下 KL ダイバージェンス，$KL[p:q]$ と略記）．これは非対称である．離散分布のときは積分を和分にする．なお，これを拡張したアルファダイバージェンス*5)は，α を実数のパラメータとして，

$$D_\alpha[p(x):q(x)] = \frac{4}{1-\alpha^2}\left\{1 - \int p(x)^{\frac{1-\alpha}{2}} q(x)^{\frac{1+\alpha}{2}} dx\right\}. \tag{1.19}$$

3)　正定値行列

これにはいろいろなものが考えられる．例えば，

$$D[P:Q] = \mathrm{tr}\left(PQ^{-1}\right) - \log\left|PQ^{-1}\right| - n, \tag{1.20}$$

$$D[P:Q] = \mathrm{tr}\left(P\log P - P\log Q - P + Q\right), \tag{1.21}$$

*5)　α が 1 または -1 に近づく極限で定義すると，1 ダイバージェンスは $KL[q:p]$，-1 ダイバージェンスは $KL[p:q]$ になる．

$$D[P:Q] = \frac{4}{1-\alpha^2}\mathrm{tr}\left(-P^{\frac{1-\alpha}{2}}Q^{\frac{1+\alpha}{2}} + \frac{1-\alpha}{2}P + \frac{1+\alpha}{2}Q\right) \quad (1.22)$$

などである．(1.20) 式は，統計などによく使われ，P, Q をそれぞれの分散行列とする多次元ガウス分布の間の KL ダイバージェンスとなっている．(1.21) 式は，量子情報理論に出てくる．(1.22) 式のアルファダイバージェンスは (1.20) の拡張である*6)．

4)　正測度空間

ここで，ユークリッド空間の第一象限，つまり $x_i > 0$ の領域を考えよう．この空間において，(1.17) のユークリッド距離の 2 乗の他に，

$$D[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}] = \sum\left\{-\log(y_i/x_i) + (y_i/x_i) - 1\right\} \quad (1.23)$$

は，ダイバージェンスの資格を満たす．これは，線形計画法において，線形不等式条件を満たす領域のダイバージェンスに拡張できて，内点法で効果を発揮する．

さらに，確率分布空間と同様に，アルファダイバージェンスを定義できて，これは

$$D_\alpha[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}] = \frac{4}{1-\alpha^2}\sum\left\{\frac{1-\alpha}{2}x_i + \frac{1+\alpha}{2}y_i - x_i^{\frac{1-\alpha}{2}}y_i^{\frac{1+\alpha}{2}}\right\} \quad (1.24)$$

となる．

1.3 不変構造とダイバージェンス

幾何学とは，「空間において変換に関して不変な性質を研究する学問である」とは，Felix Klein がエルランゲン大学の教授就任にあたって述べた幾何学の特徴づけであり，これをエルランゲン・プログラムと呼ぶ．例えば，ユークリッド幾何学は並進と回転に関して不変な性質を研究するもので，ここから図形の合同などの概念が不変なものとして出てくる．

ユークリッド空間に導入される距離，そしてその 2 乗であるダイバージェンス (1.17) は，並進と回転に関して不変である．しかし，正測度空間のダイバージェンス (1.23), (1.24) などは不変ではない．確率分布空間に導入した KL ダイバージェンスは，確率変数 x を可逆な変換 $z = f(x)$ によって z に変換して，z の分布と考えても変わらない．正定値行列の空間に導入したダイバージェンスは，行列の基底を変え，直交変換 O によって（O^T はその転置行列）

$$P' = O^T P O \quad (1.25)$$

などと変換しても不変で，

$$D[P:Q] = D\left[P':Q'\right] \quad (1.26)$$

---

*6)　もっと一般に，$f(u)$ を凸関数とする．このとき，$f(P) = \mathrm{tr} f(P)$ は，行列 P の凸関数である．ここから，行列の f ダイバージェンスが導入できる[5)]．

である．

多くの問題で，空間にダイバージェンスを導入して考察を進める．このとき，ダイバージェンスはその条件を満たす限り何でもよいが，問題によって適切で便利なものと，あまり意味をなさないものとがある．多くの場合，自然な変換や座標系の取り方に関して，これによらない不変なものを用いるのがよい．これが幾何学の精神であり，ここから有用な構造が導けることを後に見るであろう．

終わりの一言

ここで考えた多様体はすべて有限次元であった．もちろん，無限次元の多様体を考えることもできるが，実は面倒がある．空間の位相（トポロジー）の問題に起因する．有限次元では多様体に導入する位相はすべて同じであるから，気にしなくてよい．

無限次元の話として，例えば，実軸上の確率密度関数 $p(x)$ の全体を考える．ただし，$p(x)>0$ としよう．こうすると，確率測度は実軸のルベック測度と互いに絶対連続である．この空間にダイバージェンスを導入し，無邪気に有限次元のつもりでやっていくと，数学的には困難に遭遇する．

もちろん，実軸を細かく離散化して有限で近似すれば何の問題もない．だから，実質的には無邪気な議論でよい．でも，数学者は怒るだろう，離散化の仕方の極限のとり方が問題であると．いろいろ嫌な例を作ることができるからだ[*7)]．本連載では，無限次元は無視するが，読者は無邪気にやっても実害はない場合がほとんどである．でも注意が必要である．数学者はオーリッツ空間などを用いて，双対幾何学を作ろうとしている[7)]．

参考文献

1) 甘利俊一，長岡浩司，『情報幾何の方法』，岩波応用数学講座，1983.
2) S. Amari, H. Park and T. Ozeki, Singularities Affect Dynamics of Learning in Neuromanifolds, *Neural Computation*, **18**, 1007–1065, 2006.
3) H. Wei, J. Zhang, F. Cousseau, T. Ozeki and S. Amari, Dynamics of Learning Near Singularities in Layered Networks, *Neural Computation*, **20**, 813–843, 2008.
4) 福水健次，『特異モデルの統計学』，岩波書店，2004.
5) I.S. Dillon and J.A. Tropp, Matrix nearness problems with Bregman divergences, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **29**, 1120–1146, 2007.
6) S.W. Ho and R.W. Yeung, On the discontinuity of the Shannon information measures, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **55**, 5362–5374, 2009.
7) A. Cena and G. Pistone, Exponential statistical manifold, *Ann. Inst. Ststis. Math*, **59**, 27–56, 2007.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

*7)　こうした問題は，離散無限でも現れる．例えば，離散無限個の対象の上の確率分布 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots)$ を考えよう．$\boldsymbol{p}$ は無限次元ベクトルである．ここに，例えば変分距離 $d(\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q})=\sum_{i=1}^{\infty}|p_i-q_i|$ などを導入する．さて，この空間上の関数としてエントロピー $H(\boldsymbol{p})=-\sum_{i=1}^{\infty}p_i\log p_i$ を取り上げる．無限次元の場合はエントロピーは，何と $\boldsymbol{p}$ の連続関数にならない．したがって，相互情報量なども，確率分布空間の上で連続性を失う[6)]．

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第9回　—立式で鍛える論理的思考法—

渦度・バーガース方程式

神部　勉

1. ベクトルの場

空気や水などの流体の動きをみると，渦や波がしばしば観察される．今回はそれらが方程式でどのように表現されるかが主題である．

流体の運動では空間の各点で速度ベクトルが定義される．現実の世界ではそれは時々刻々と変化している．空間点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$, 時刻を t として，流体速度が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ の形で表せるとしよう．このとき，空間の各点にベクトル $\boldsymbol{v}$ の矢が定義されているとみることができ，それを速度ベクトルの場と言う．流体力学では，**速度場** $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ が $\boldsymbol{x}$ と t の関数としてどのように表せるかを探求する．

記述を簡単にするために，問題を2次元で考えてみよう．2次元デカルト空間の座標（直角座標）を (x,y) とし，速度ベクトルの成分を (u,v) とする．空間の任意の点を選び，そこを原点とし，そこでの速度が $\boldsymbol{v}_0=(u_0,v_0)$ とする．原点 $(0,0)$ の近傍で，速度をテーラー展開して，x,y の2次項以上を省略すると，

$$\left.\begin{array}{l} u-u_0=a\,x+C\,y+O(|\boldsymbol{x}|^2), \\ v-v_0=D\,x+b\,y+O(|\boldsymbol{x}|^2) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

と書ける．ここで係数 a,b および C,D は定数で，上式の係数行列は対称行列と反対称行列との和として次のように表せる：

$$\begin{pmatrix} a & C \\ D & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

ここで，$\gamma-\zeta=C,\gamma+\zeta=D$. これより，

$$\gamma=\frac{1}{2}(C+D), \quad \zeta=-\frac{1}{2}(C-D).$$

式(2)の右辺第1項は対称，第2項は反対称の行列である．対称行列の作る速度場 $(u^{(s)},v^{(s)})$ は

$$u^{(s)}=ax+\gamma y, \quad v^{(s)}=\gamma x+by$$

と書ける．スカラー関数 $\varPhi$ を次式で定義しよう：

$$\varPhi=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)+\gamma\,xy.$$

これを使うと，速度の x 成分が $u^{(s)}=\partial\varPhi/\partial x$ と表せることがわかる．y 成分も同様で，まとめてベクトル形で書くと，

$$\boldsymbol{v}^{(s)}=(\partial_x\varPhi,\,\partial_y\varPhi)=\mathrm{grad}\,\varPhi. \qquad (3)$$

$\mathrm{grad}=(\partial_x,\,\partial_y)$ は微分演算子で，x 成分が x 方向の偏微分 $\partial_x\,(\equiv\partial/\partial x)$, y 成分が y 方向の偏微分 $\partial_y\,(\equiv\partial/\partial y)$ で定義される．微分演算子としては，次のナブラ演算子も定義される：

$$\nabla=(\partial_x,\,\partial_y).$$

grad は基本的にはスカラー関数に作用する演算子である．他方，演算子 ∇ はベクトルにも作用するベクトル微分演算子である．$\mathrm{grad}\,\Phi$ の形は，ポテンシャル Φ の力の場合とも同形なので，$\mathrm{grad}\,\Phi$ はポテンシャル流の速度場とも呼ばれる．

次に，反対称行列の速度場を $\boldsymbol{v}^{(a)} = (u^{(a)}, v^{(a)})$ と書くと，$u^{(a)} = -\zeta y$, $v^{(a)} = \zeta x$．こちらもベクトル形で書くために，3 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ および $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \zeta)$ を定義する．脚注*1) より，$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x} = (-\zeta y, \zeta x, 0)$ となるので，

$$u^{(a)} = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})_x, \quad v^{(a)} = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})_y, \qquad (4)$$

と書ける．これは，点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{\Omega}$ 軸（z 軸）の周りに**角速度** $|\boldsymbol{\Omega}| = |\zeta|$ で回転する速度に等しい．

全速度は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}^{(s)} + \boldsymbol{v}^{(a)}$ で与えられる．以上をまとめると，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \mathrm{grad}\,\Phi + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x} + O(|\boldsymbol{x}|^2), \qquad (5)$$

全速度 = (並進) + (渦なし流) + (局所回転) + ⋯

が原点近傍での速度を表すことがわかる[1]．

流体は局所的に原点の周りを角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転し，その全体は渦なし流 $\mathrm{grad}\,\Phi$ で変形しながら，速度 $\boldsymbol{v}_0$ で並進運動する．原点以外の点 $\boldsymbol{x}_1$ でも，同様な局所展開が可能である．その場合には $\boldsymbol{v}_0$ は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1)$ で置き換える必要がある．

3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ の特徴は，局所回転 $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$，および発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ などで表される．局所の意味は，全体が回転していなくても，各点で局所的に回転が定義できるからである．速度場の局所回転は，

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} \equiv \nabla \times \boldsymbol{v} = (\partial_y w - \partial_z v, \partial_z u - \partial_x w, \partial_x v - \partial_y u) \qquad (6)$$

で定義され，$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{\omega}$ と書くことにし，$\boldsymbol{\omega}$ を**渦度**と呼ぶ．式 (1) の速度場では，

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, D - C) = (0, 0, 2\zeta) = 2\,\boldsymbol{\Omega}.$$

これより渦度が，局所回転の角速度の 2 倍を表すことがわかる（3 次元でも同様）．$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\,\Phi) = 0$ なので，$\mathrm{grad}\,\Phi$ は**渦なし**の場と呼ばれる．

速度場 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ の発散の定義は，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w \qquad (7)$$

である．式 (1) の速度場では，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = a + b$．grad を含む次の式はよく使われる：

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_x^2 + \partial_x^2 \equiv \Delta.$$

Δ はラプラス演算子（ラプラシアン）である．

2. ランキン渦および渦糸

渦の代表としてランキン渦と渦糸を例にとって，速度場と渦度場を考えてみよう[1]．いずれも軸対称で，渦の軸を z 軸にとると，速度は垂直な (x, y) 面内にある．渦度は z 成分 ω のみである．

(a) ランキン渦は，(x, y) 面の半径 R の円内で ω が一定値 ω_0 をとる渦として定義される（図 1）：

$$\omega(x, y) = \omega_0 \ (r \le R); \quad 0 \ (r > R). \qquad (8)$$

極座標 (r, θ) を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ によって導入すると，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$．極座標系での速度を (v_r, v_θ) とすると（$\theta = \tan^{-1}(y/x)$），

$$\left.\begin{aligned} u &= v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta, \\ v &= v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (9a)$$

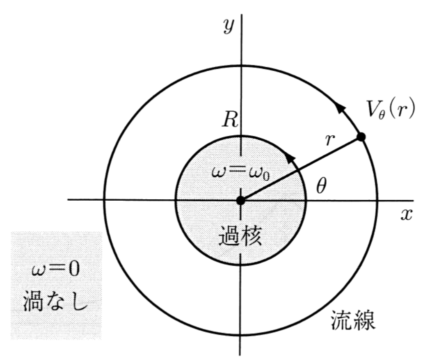


図 1　ランキンの渦．

*1)　2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ および $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ が与えられたとき，スカラー積，ベクトル積は，それぞれ次で定義される：

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \equiv (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x).$$

によって (x, y) 系の速度が表される．微分は，$\partial r/\partial x = \cos\theta$, $\partial\theta/\partial x = -\sin\theta/r$，等より

$$\left.\begin{aligned}\partial_x &= (\partial r/\partial x)\partial_r + (\partial\theta/\partial x)\partial_\theta\\ &= \cos\theta\,\partial_r - r^{-1}\sin\theta\,\partial_\theta,\\ \partial_y &= \sin\theta\;\partial_r + r^{-1}\cos\theta\;\partial_\theta.\end{aligned}\right\} \tag{9b}$$

この軸対称例では，速度の動径成分はゼロ（$v_r = 0$），方位角方向の微分はゼロ $\partial_\theta = 0$ となる．この性質を使うと，渦度 (6) の z 成分は，

$$\begin{aligned}\omega &= \partial_x v - \partial_y u\\ &= \partial_r v_\theta + r^{-1}v_\theta = r^{-1}\partial_r(rv_\theta)\end{aligned} \tag{10}$$

と表せる．左辺は (8) で与えられるので，これは r で積分できて，次の $v_\theta(r)$ が得られる（図 2）：

$$v_\theta(r) = \begin{cases}\varOmega\, r & \text{for} \quad r \le R,\\ k\, r^{-1} & \text{for} \quad r > R\end{cases} \tag{11}$$

（$\varOmega = \frac{1}{2}\omega_0$）．円 $r = R$ の内外の速度 v_θ が円 $r = R$ 上で連続となるように定数 $k = \varOmega R^2$ を定める．

動径成分 v_r がゼロなので，原点を中心とする同心円が流線となる．円 $r = R$ の内部で，周を回る速度 v_θ は原点からの距離 r に比例する．この性質は，円柱部分（$r \le R$）の**渦核**が剛体回転をすることを表している．外部では v_θ が r に反比例する．これは渦度 $\boldsymbol{\omega}$ がゼロ，すなわち円の外が**渦なし**（$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = 0$）であることを表している．このことは，式 (10) の最後の式で r と v_θ の積が定数になることから直ちにわかる．

(b) **渦糸**は非常に細い渦で，ランキン渦の半径 R が無限小となった極限として定義することができるが，$R \to 0$ の極限と同時に，$k = \frac{1}{2}\omega_0 R^2$ が極限値 $\kappa/2\pi$ に収束すべく，ω_0 は限りなく大となる極限をとる．このとき，式 (11) より，

$$V_\theta(r) = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{1}{r} \quad (r > 0). \tag{12}$$

一方，$v_r = 0$ である．この速度場 $\boldsymbol{v} = (0, V_\theta(r))$ は，原点 $r = 0$ を通る z 軸上を除いて渦なしであることは式 (10) で保証される．

この渦は，渦度が z 軸に集中し，その渦核が直線の渦である．渦核上では，速度は発散する特異性があるが，周辺の速度場には注目すべき特徴がある．z 軸を 1 周する閉曲線 C をとり，その曲線上で，次の線積分を定義する：

$$\varGamma[C] \equiv \oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} V_\theta\, r\, d\theta = \kappa. \tag{13}$$

線積分 $\varGamma$ は**循環**と呼ばれる．極座標の表現では $\boldsymbol{v}$ は $(v_r, v_\theta) = (0, V_\theta(r))$，$d\boldsymbol{x}$ は $(dr, rd\theta)$ なので，$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} = V_\theta\, r\, d\theta = (\kappa/2\pi)d\theta$．すなわち渦糸では，原点を一周する閉曲線に沿う循環は一定である（閉曲線は必ずしも円でなくても成立する）．κ は渦の強さと呼ばれ，時間的に不変な量である．

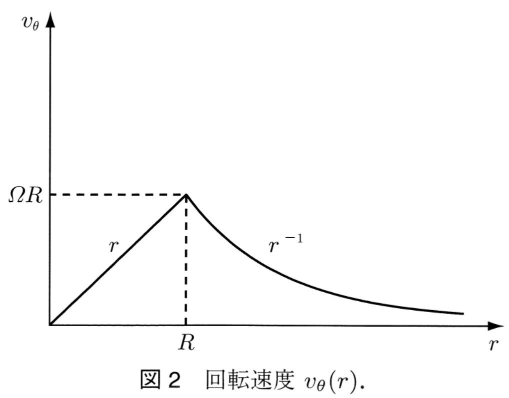


図 2　回転速度 $v_\theta(r)$.

3. 流体の運動方程式

流体の運動では各点に速度ベクトルが定義される．物理的にはその点を含む流体微小部分は質量を有するので，運動量も同時に存在する．L. オイラーは，そのような物理的発想の下に 250 年前に流体の運動方程式を以下のように創出した．

(a) 運動方程式

3 次元の流体の中に微小体積 $\varDelta V$ をとる．流体密度を ρ とすると，その質量は $\rho\,\varDelta V$ である．$\varDelta V$ の代表点の位置を $\boldsymbol{X}(t)$ とすると（t は時間），加速度は 2 階微分 $\boldsymbol{A} = \ddot{\boldsymbol{X}}$ である．他方，体積 $\varDelta V$ の表面には，周囲の流体から圧力 $p(\boldsymbol{x}, t)$ がかかる．上下左右の圧力を差し引きした正味の力は $(-\mathrm{grad}\,p)\varDelta V$ の形で表せる[1)]．流体は完全流体を仮定し，粘性効果は省略する．

以上をまとめると，[質量]·[加速度]=[力] の形の

運動方程式は，$(\rho\Delta V)(\boldsymbol{A}) = -\operatorname{grad} p\,\Delta V$ と表せる．両辺の ΔV をとると，運動方程式が

$$\rho\boldsymbol{A} = -\operatorname{grad} p \tag{14}$$

と書ける．時刻 t での速度場が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ と表されるとする．時刻 $t+\Delta t$ では速度場は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t+\Delta t)$ となる．点 $\boldsymbol{x}$ にあった流体粒子は速度 $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ で移動しているから，時刻 Δt の後には，位置が $(u\Delta t,\, v\Delta t,\, w\Delta t)$ だけ変位している．流体粒子の速度増分 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\Delta t,\, t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\Delta\boldsymbol{v} = (\partial_t\boldsymbol{v} + u\,\partial_x\boldsymbol{v} + v\,\partial_y\boldsymbol{v} + w\,\partial_z\boldsymbol{v})\,\Delta t + \cdots.$$

従って，加速度は，

$$\boldsymbol{A} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \partial_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}.$$

ここで $u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ は内積 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ で置き換え，**ラグランジュ微分** D/Dt を

$$\frac{D}{Dt} \equiv \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z = \partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{15}$$

で定義した．これは流体速度 $\boldsymbol{v}$ で動く座標系での微分を意味する．式 (14) の運動方程式は

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{v} = \partial_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{16}$$

となる．これが完全流体に対する**オイラーの運動方程式**である[1)]．

(b) 連続の式

流体の運動では，流体粒子の質量が保存する．それは次の積分方程式によって表される：

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = -\oint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS. \tag{17}$$

左辺は，任意に選んだ流体の体積 V に含まれる全質量の時間変化率である．式 (17) は，V 内の質量の増減は，V の境界面 S を通過する流体の入出量に等しくなければならないことを述べる．ここで，$\boldsymbol{n}$ は境界面 S に対する外向きの単位法線ベクトルで，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = v_n dS$ は面要素 dS から流出する流体体積（$v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$），$\rho v_n dS$ は流出質量を表す．流出なので負号がついている．ガウスの定理を使うと，(17) の右辺は体積積分 $-\int \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})dV$ に変換される．左辺に移すと，

$$\int_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]dV = 0$$

となる．上の等式は，任意の体積 V で成立しなければならない．それは被積分関数 $[\cdot]$ がゼロのときにのみ成立する．ゆえに，次の**オイラーの連続の式**が得られる：

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{18}$$

(c) 渦度方程式

完全流体の運動では粘性によるエネルギー散逸がないので，流体粒子のエントロピーは保存される．初期に流体全体でエントロピーが一様ならば，その状態が持続する．そのとき，方程式 (16) から，次の渦度 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{curl}\boldsymbol{v}$ の方程式が導かれる：

$$\partial_t\boldsymbol{\omega} + \operatorname{curl}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) = 0.$$

この形の方程式は **frozen field の方程式**と呼ばれる．渦度 $\boldsymbol{\omega}$ があたかも流体にに凍りついたように，流体の速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ で運ばれる運動を表現し，$\boldsymbol{\omega}$ が個性を有するかのように振る舞う[1)]．

4. バーガース方程式

次にバーガース方程式に目を転じよう．それは

$$v_t + vv_x = \lambda v_{xx}\quad(\lambda:\ \text{定数}) \tag{19}$$

の形の 2 階偏微分方程式である（下付き記号は微分を意味する：$v_t = \partial_t v$, $v_{xx} = \partial_x^2 v$, 等）．これは 1 次元の波の方程式，あるいは粘性流体のモデル方程式とみなされる．その意味を考える前に，まず粘性流の方程式を書いておく．粘性流体の運動は，式 (16) の右辺に粘性項 $\nu\Delta\boldsymbol{v}$ が追加され，次のナヴィエ・ストークス方程式で与えられる：

$$\partial_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\boldsymbol{v} \tag{20}$$

（$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, ν は粘性係数）．速度は，x 成分のみの 1 次元流 $\boldsymbol{v} = (u,0,0)$ を仮定する．方程式 (20) および連続の式 (18) で，圧力 p，密度 ρ, u はいずれも座標 x と時間 t だけの関数とすると，

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = \nu u_{xx}, \qquad (21)$$

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0. \qquad (22)$$

(a) バーガースの発想

バーガース[2] (1948) は，複雑な乱流現象を理解するための手がかりを得ようと，簡単なモデル方程式を提案した．3 次元の方程式 (20) の解析は複雑すぎると見たのである．彼のアイディアは方程式 (20) の本質的特徴をモデル方程式に組み込むことであった．乱流のダイナミクスにおいて，非線形性と拡散性（もしくは散逸性）が重要な要素であり，それらは (20) の左辺第 2 項および右辺第 2 項でそれぞれ表されている．そこで 1 次元問題として提案したのが式 (19) である．1 次元問題の完全な式 (21) の左辺第 3 項を省略し，u を v としたのが (19) で，従属変数が v 一つになって解析可能であるばかりでなく，(19) には非線形項 vv_x，および拡散項 λv_{xx} が含まれている．

(b) 簡単な解

方程式 (19) は一つの簡単な解を有する．その意味は次項以下で考察することにして，それは

$$v(x,t) = a_0 - b\tanh\frac{b}{2\lambda}X \qquad (23a)$$

と表される[2,3] (a_0，b は正定数，$X = x - a_0 t$)．実際，t および x について微分を実行すると，

$$\left.\begin{aligned} v_t + a_0 v_x &= 0, \\ (v - a_0)v_x &= (b^3/2\lambda)\sinh Y/\cosh^3 Y, \\ \lambda v_{xx} &= (b^3/2\lambda)\sinh Y/\cosh^3 Y \end{aligned}\right\} \qquad (23b)$$

となり（$Y = (b/2\lambda)X$），方程式 (19) が満たされているだけでなく，非線形項 $(v - a_0)v_x$ と拡散項 λv_{xx} とのバランスも成立している（図 5 参照）．

(c) 非線形項と波の急峻化

式 (19) の左辺を一般化して次の方程式，

$$v_t + c(v)\,v_x = 0, \qquad (24)$$

で非線形項 $c(v)v_x$ の意味を考えてみよう（$c(v)$ は与えられた v の関数）．式 (24) の一般解は，

$$v = f(\xi), \quad \xi = x - c(v)t,$$

で表せる（$f(x)$ は x の任意関数）．実際，微分をとると，$v_t = -(c + c'(v)t\,v_t)f'(\xi)$，および $v_x = (1 - c'(v)t\,v_x)f'(\xi)$ なので，$1 + tc'f' \neq 0$ なら，方程式 (24) が満たされる（$t = 0$ の近傍で可）．

2 次元 (x,t) 面上で，勾配が $dx/dt = c(v(x,t))$ で与えられる曲線 L は，方程式 (24) の**特性曲線**と呼ばれる．L 上では v は一定である．実際，

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_L = v_t + v_x\frac{dx}{dt} = v_t + c(v)v_x = 0$$

なので, L は実は直線である．特に, $t = 0$ に $x = \xi$ を通る特性曲線 L_ξ は傾きが $c(f(\xi))$ である．

以上より，方程式 (24) の初期値問題：[$t = 0$ で，$v = U(x)$ $(-\infty < x < \infty)$] に対する解が

$$v = U(\xi), \quad \xi = x - c(\xi)\,t$$

で与えられる（図 3）．ただし $c(\xi) \equiv c(U(\xi))$．この解によって 2 次元 (x,t) 面が特性曲線 L_ξ で覆われるので，点 (x,t) を与えて対応する ξ の値が決められ，さらに各点で v の値が $U(\xi)$ で与えられる．導関数を ξ の関数として求めると，

$$v_x = \frac{U'(\xi)}{1 + c'(\xi)\,t}, \quad v_t = -\frac{c(\xi)U'(\xi)}{1 + c'(\xi)\,t} \qquad (25)$$

となる．これは, 解 $v = U(\xi)$ より, $v_x = U'(\xi)\xi_x$, $v_t = U'(\xi)\xi_t$ であること，さらに特性曲線の式 $\xi = x - c(\xi)t$ より，ξ_x および ξ_t を ξ の関数と表すことで得られる．

ここで問題が生じる．特性曲線 $\xi = x - c(\xi)t$ の傾き $c(\xi)$ は線ごとに異なるので，初期値 $U(\xi)$ の微分可能性を仮定すれば，初期はともかく，やがてある時刻 t_b 以後，v の多価性が生じる恐れがある．それは式 (25) の分母 $Q(t,\xi) = 1 + c'(\xi)\,t$ がゼロになる時刻に対応する．$Q(0,\xi) = 1$ であ

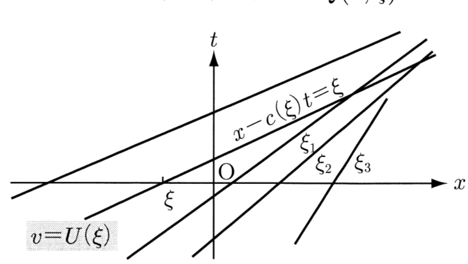


図 3　特性曲線.

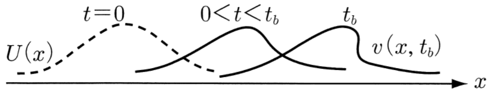


図 4　波の変形と急峻化.

るが，ある時刻 $t>0$ で $Q=0$ となるのは，$c'(\xi)=c'(U)U'(\xi)<0$ となる ξ の区間である．式 (19) の場合は $c(U)=U$ なので，関数 $U(\xi)$ が減少する区間である（図 4）．その区間の ξ に対し，

$$t_b=\min_{c'(\xi)<0}\frac{-1}{c'(\xi)}$$

の時刻以後，解 (25) が発散し，一価性が破れる．物理的にいうなら，非線形効果で波の突っ立ち（急峻化）が起こるためである[3]．解 (23a) で発散が起こらないのは，式 (19) の右辺の拡散項 λv_{xx} の存在のためと理解される．実際，式 (23b) では非線形項と拡散項のバランスが成立していた．

(d) 拡散性の非線形音波（弱い衝撃波）

バーガース方程式は拡散性の非線形音波の式としても理解される．静止した一様な気体があり，圧力が p_0，密度 ρ_0，比熱比 γ とすると，音速は $a_0=\gamma p_0/\rho_0$．その気体の 1 次元運動は，式 (21), (22) で支配される．そのときの圧力 p, 密度 ρ は，音速 a の関数として次式で表される：

$$\rho=\rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{2/(\gamma-1)},\quad p=p_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

これらを使って，p, ρ の代わりに音速 a を変数とすると，式 (21), (22) は次のように変換される：

$$u_t+uu_x+\frac{2}{\gamma-1}aa_x=\nu u_{xx}, \qquad (26)$$

$$a_t+ua_x+\frac{\gamma-1}{2}au_x=0. \qquad (27)$$

ここでリーマン不変量 r, s を次で定義する[1,4]：

$$r=\frac{a}{\gamma-1}+\frac{1}{2}u,\quad s=\frac{a}{\gamma-1}-\frac{1}{2}u. \quad (28)$$

式 (26), (27) を使って $\partial_t r$, $\partial_t s$ の式を構成すると，

$$r_t+(a+u)r_x=q,\quad s_t+(-a+u)s_x=-q \quad (29)$$

が導かれる．ここで，$q=\frac{1}{2}\nu u_{xx}=\frac{1}{2}\nu(r_{xx}-s_{xx})$．拡散を省略すれば（右辺 $=0$），(29) の解は，特性曲線 $dx/dt=a+u$ 上で $r=$ 一定，特性曲線 $dx/dt=-a+u\,(<0)$ 上で $s=$ 一定（$a\gg u$），となる．

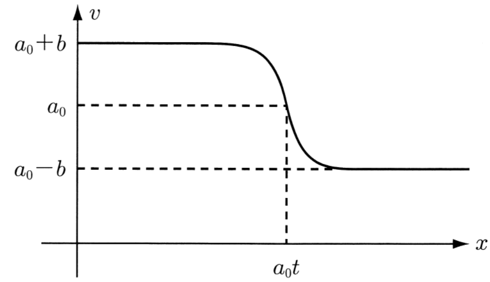


図 5　弱い衝撃波 $v=a_0-b\tanh(x-a_0t)/d$.

静止した前方（$x>0$）の気体（$u=0$, $a=a_0$）に向って進む音波では，前方から後方へ向う後者の特性曲線上では $s=s_0$（定数）．一方，式 (28) より，$a+u=\frac{1}{2}(\gamma+1)r+\frac{1}{2}(\gamma-3)s_0$．そこで，

$$w\equiv a+u-a_0,\quad r=\frac{2}{\gamma+1}w+\mathrm{const}$$

によって w を定義し，r の代わりに w を変数とすると，(29) の最初の式は

$$w_t+(a_0+w)w_x=\frac{1}{2}\nu w_{xx},\quad \left(q\approx\frac{1}{2}\nu r_{xx}\right)$$

となる．ここで，$w=v-a_0$ とし，$\frac{1}{2}\nu$ を λ と書けば，(19) 式のバーガース方程式に帰着する[4]．

解 (23a) は，音速 a_0 で x の正方向に運動する座標系でみると，$X\,(=x-a_0t)$ だけの関数で時間によらない．$X\to-\infty$ では，$v\to a_0+b\,(>a_0)$，$X\to+\infty$ では，$v\to a_0-b\,(<a_0)$ なので，超音速から亜音速への遷移を表す（弱）衝撃波と解釈できる（図 5）．遷移層の厚さは $d\equiv 2\lambda/b=\nu/b$ 程度で，粘性係数 $\nu\to 0$ の極限で不連続層となる．

参考文献

1) 例えば，神部勉 (1995):『流体力学』裳華房.
2) J.M. Burgers (1948): *Adv. Appl. Mech.*, vol.**1**, 171–199.
3) G.B. Witham (1974): *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley & Sons) Ch.4;
神部勉 (1987)：『偏微分方程式（6 章）』，講談社.
4) M.J. Lighthill (1956): *Surveys in Mechanics* (ed. by Batchelor and Davis, Cambr. Univ. Press), 250–351.

（かんべ・つとむ，陳省身数学研究所（天津））

特　集（2010 年 11 月号予告）

連続から離散へ

なぜ離散的な考え方か

本体 952 円

はじめに	薩摩　順吉
離散正則関数	吉田　正章
非線形差分方程式の爆発現象	松家　敬介 時弘　哲治
離散的な曲面	近藤　剛史 W. Rossman
p 進体上の代数幾何	三枝　洋一
離散非同期観測データ間の共分散推定	林　　高樹
量子ホール効果における連続と離散	押川　正毅
格子ゲージ理論	宇川　　彰
［コラム］	礒島　　伸
［インタビュー］	薩摩　順吉

特　集（2010 年 9 月号）

南部陽一郎

学んで考え，考えて学ぶ物理の奥義

本体 952 円

南部陽一郎の物理　その広さ，深さに迫る	吉村　太彦
「対称性の自発的破れ」ノーベル賞受賞テーマ	細谷　　裕
超伝導への傾注　物性物理とハドロン物理から	青木　秀夫 初田　哲男
イジング模型の論文　統計力学への興味	西森　秀稔
質量の起源	小林　　誠
カイラル対称性の破れとクォーク閉じ込め 「真空」の物性理論の展開	国広　悌二
ストリングの発想　弦理論の生みの親	米谷　民明
南部括弧式と M 理論	松尾　　泰
南部モード	坂東　昌子
［コラム］南部先生との思い出	菅原　寛孝
［コラム］南部先生との思い出	江口　　徹
《現象から方程式を創り出す》　第 8 回	小磯　憲史
《物理の道しるべ》　第 18 回	出口　哲生
《数学の道しるべ》　第 18 回	岡本　　久

編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．

私たちの身近にある様々なところでいろいろな曲面を見ることができると思います．今回の特集でも記事の中でたくさんの曲面が紹介されています．数式は少しとっつきづらいかな，という人もこれらの曲面を見て，形を楽しんでみては如何でしょうか．

ところで，先日，演奏会を聴きに行ったのですが，そのときにホールの客席がとても面白い形で配置されていました．プログラムノートには音響効果を狙ってそのような形で配置した，というようなことが書いてあり，なるほど，と思いました．他にもホール上部の反響板を見ると，これも曲がった形をしておりました．同じプログラムノートにホールを実際に建てる前に実物よりも小さな模型を作成して，そこで音響テストを行ってから建設にかかっているようです．もちろん，客席の椅子の材質や舞台の床，ホールの壁の材質も大いに関係してくるのでしょうが，美しい曲面と音楽の接点がこんなところにもあるのですね．　(R)

数　理　科　学　10月号

2010 年 10 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 サ　イ　エ　ン　ス　社　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁